

BEITRAG AUS DER REIHE:

Karl-Heinz Lotze, Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik Band 5 Naturphänomene und Astronomie

ISBN 3 - 7896 - 0666 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 2002

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

Sabine Volkmer

Bahnrechnungen zum Gravitationswellen-Detektor-System LISA (Laser Interferometer Space Antenna)

1 Das Projekt LISA

Relativitätstheorie, Urknall, Schwarze Löcher – diese Begriffe symbolisieren eine Veränderung des wissenschaftlichen Weltbildes im 20. Jahrhundert, die geradezu als revolutionär angesehen werden kann. Ihr Beginn war die Veröffentlichung der Speziellen Relativitätstheorie durch Albert Einstein im Jahr 1905 sowie deren Erweiterung zur Allgemeinen Relativitätstheorie, in deren Folge zahlreiche Entdeckungen, Beobachtungen und Erklärungen neuer astronomischer Objekte und erstaunlicher physikalischer Phänomene standen. Viele der menschheitsgeschichtlich so jungen Vorstellungen von Raum und Zeit sind uns heutzutage sehr vertraut. Andererseits existieren in ihrem Zusammenhang noch unzählige Fragen und ungelöste Probleme. Obgleich die Allgemeine Relativitätstheorie seit 1960 immer wieder durch Beobachtungen und Experimente belegt worden ist, suchen Wissenschaftler weiter nach praktischen Beweisen für ihre Voraussagen, die wiederum fundamentale neue Erkenntnisse liefern und unser Bild vom Universum erweitern könnten. Einen solchen bisher nicht erschlossenen Informationskanal stellen die Gravitationswellen dar.

Einstein schloss aus der Annahme, dass die Ausbreitung der Änderung eines Gravitationsfeldes mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen müsse, auf die Existenz von Gravitationswellen. Eine erste, indirekte Bestätigung erfuhr diese Theorie 1974 mit der Entdeckung eines Doppelstern-Pulsars durch Hulse und Taylor: Die Ergebnisse von Periodenbeobachtungen des Pulsars zeigten eine Verringerung des Abstandes zwischen den beiden vermutlichen Neutronensternen und damit einen Energieverlust, der mit der mittels der Relativitätstheorie berechneten Energieabstrahlung durch Gravitationswellen gut übereinstimmte. Von weitaus höherer Qualität wäre freilich der direkte Nachweis der Wellen mit Gravitationsantennen, an dem seit Jahrzehnten gearbeitet wird – bisher allerdings ohne den gewünschten Erfolg. Der mit einer solchen Antenne zu messende Effekt ist die erwartete allgemein-relativistische, äußerst geringe Längenänderung beim Durchgang einer Gravitationswelle. Er könnte beispielsweise in einem Laser-Interferometer aufgrund der Veränderung des Interferenzmusters festgestellt werden. Mit auf der Erde stationierten Interferometern lassen sich laut Theorie Gravitationseruptionen infolge von Doppelsternfusionen und Supernovae beobachten. Periodische Wellen, die von rotierenden Doppelsternsystemen und Schwarzen Löchern ausgehen, werden jedoch auf der Erde durch Hintergrundrauschen ver-

deckt. Die Störungen ließen sich durch Messungen im Weltraum vermeiden. Zudem könnte das Interferenzgerät dort so groß sein, dass auch die Erforschung sehr niedrigfrequenter Wellen (10^{-4} bis 10^{-1} Hz) möglich wäre.

Eines der bedeutendsten Vorhaben der Gravitationsforschung ist derzeit das Projekt LISA (Laser Interferometer Space Antenna), das von der European Space Agency als Grundstein des langfristigen Weltraum-Wissenschaftsprogrammes "Horizon 2000 Plus" gewählt wurde. LISA ist im Prinzip ein im Weltraum befindliches Michelson-Interferometer mit sehr langer Grundlinie (5×10^6 km). Drei Raumkapselpaare, die Laser und Spiegel enthalten, sollen sich unabhängig voneinander auf Ellipsenbahnen derart um die Sonne bewegen, dass sie stets die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden, dessen Mittelpunkt der Erde auf deren Umlaufbahn in relativ konstantem Abstand folgt. Die Parameter der Ellipsenbahnen sind also so zu wählen, dass insbesondere die Forderung nach konstanten Abständen zwischen je zwei Satellitenpaaren annähernd erfüllt wird. Nach gegenwärtigen Plänen soll das Sonnensatellitensystem ungefähr im Jahr 2015 in Umlauf gebracht werden und dann mindestens zwei Jahre lang Daten liefern. Im Ergebnis dieses Projektes könnten neben der Bestätigung einer der wichtigsten Konsequenzen der Allgemeinen Relativitätstheorie beispielsweise Aussagen über die Natur und das Verhalten Schwarzer Löcher oder sogar über die frühesten Zeitpunkte in der Entstehung des Universums sowie eine Fülle neuer astronomischer Informationen stehen.

Im Rahmen der am mathematisch-naturwissenschaftlichen Spezialschulteil des Albert-Schweitzer-Gymnasiums Erfurt in der Oberstufe durchgeführten Projektarbeit beschäftigte ich mich auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Neugebauer von der Friedrich-Schiller-Universität Jena mit dem Projekt LISA, schwerpunktmäßig mit der Gestaltung der Satellitenbahnen. Als Grundlage diente mir die 1995 vom LISA-Team erstellte Vorstudie "Pre-Phase A Report" [1]. Darin sind eine verbale Beschreibung der erwünschten Bewegung des Satellitendreiecks, die im folgenden als "mathematische Bahn" bezeichnet wird, und Parameter der Ellipsenbahnen gegeben. Meine konkrete Aufgabenstellung bestand in der Überprüfung, inwieweit die mathematische Bahn mit den physikalisch zwangsläufigen Ellipsenbahnen übereinstimmt. Dazu war es notwendig, allgemeine Gleichungen zur Beschreibung beider Bahnen - genauer: der Positionen der Satelliten auf den Bahnen in Abhängigkeit von der Zeit - aufzustellen. Damit lassen sich unter Verwendung der vorgegebenen Ellipsenparameter, deren Wahl ich nachvollziehen konnte, Abstandsberechnungen durchführen und daraus Aussagen über den Grad der Übereinstimmung der mathematischen und der physikalischen Bahn gewinnen.

2 Vorüberlegungen zur Gestaltung der Satellitenbahnen

Der verbalen und mathematischen Beschreibung der Satellitenbahnen, die im dritten bis fünften Abschnitt erfolgt, sollen zunächst einige grundsätzliche Über-

legungen und punktuelle Begründungen für die Bahngestaltung vorangestellt werden. Als Grundvoraussetzung sei dabei angenommen, dass sich die drei Satellitenpaare, im folgenden kurz drei Satelliten genannt, mit (annähernd) gleichen, konstanten paarweisen Abständen zueinander im Sonnenorbit bewegen. Auf Überlegungen zu geozentrischen Bahnen soll hier verzichtet werden, weil sich das LISA-Team im Verlauf einer ESA-Studie für die heliozentrische Variante entschied, da diese geringere technische Anforderungen an Ladung und Raumkapseln stelle. Auch die Bewegung aller drei Satelliten auf ein- und derselben Kreisbahn wird im folgenden nicht näher in Betracht gezogen, denn in diesem Fall läge die Dreiecksseitenlänge in der Größenordnung des Umlaufradius, der eine Astronomische Einheit (AU) betragen sollte, wodurch das Interferometer nicht mehr den gewünschten Frequenzbereich erfassen würde. Bei einer Verringerung des Umlaufradius, bei der die Armlänge des Interferometers die geforderten 5×10^6 km betrüge, kämen die Satelliten der Sonne so nahe, dass die hohe Temperatur und die große Masse der Sonne sicherlich starke Störungen hervorrufen würden.

Im mathematischen Modell (Abb. 1) werden obige Grundbedingungen durch ein gleichseitiges Dreieck realisiert, dessen Ecken die drei Satelliten sind und dessen Mittelpunkt um die Sonne kreist. Damit eine solche Anordnung zeitlich stabil ist, müssen die Umlaufzeiten der Satelliten und daher nach dem dritten Keplerschen Gesetz ihre mittleren Abstände zur Sonne gleich sein. Dies würde bei einem in der Umlaufebene, das sei die Ekliptik, liegenden Dreieck erreicht, wenn dieses sich rein translatorisch bewegte, also keine Rotation ausführte. Die Eckpunkte eines derart "lagestabil" um die Sonne kreisenden gleichseitigen Dreiecks beschrieben drei Kreisbahnen, deren Mittelpunkte wiederum in Form eines gleichseitigen Dreiecks gleicher Größe um die Sonne als ihren Mittelpunkt angeordnet wären. Physikalisch sind diese Kreisbahnen jedoch nicht möglich, da sich hierbei die Sonne

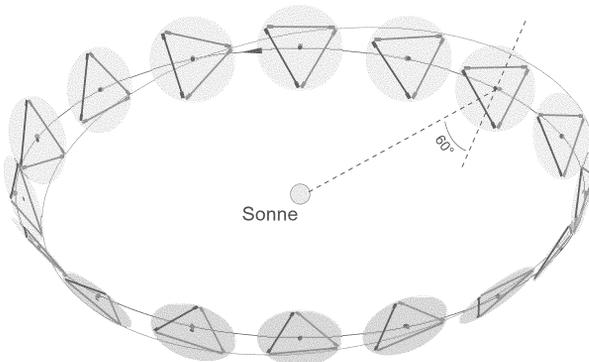


Abb. 1: Räumliche Darstellung des mathematischen Modells zu Bewegung der Satelliten

nicht im Mittelpunkt befände. Es liegt nahe, statt dreier Kreisbahnen drei gegenüber der Ekliptik geneigte Ellipsenbahnen, deren Projektionen in die Ekliptik mit den Kreisen übereinstimmen, zu wählen, so dass ihre drei Brennpunkte mit der Sonne zusammenfallen.

Diese Ellipsenbahnen sind dann um 120° gegeneinander verdreht. Annähernd modellartig darstellen lassen sich die Bahnen, wenn das gleichseitige Dreieck eine in Bezug zur Sonne, nicht jedoch zum Raum stabile Neigung gegenüber der Ekliptik erhält und innerhalb der Umlaufzeit genau eine Rotation durchführt. Dieses mathematische Modell, das in Abb. 1 räumlich dargestellt ist, findet im ESA-Bericht Verwendung.

3 Beschreibung der mathematischen Bahn

Das LISA-Team beschreibt im Pre-Phase A Report die gewünschte Bahn des Interferometers. Sie genügt folgenden Bedingungen:

- Die drei Raumkapselpaare bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $L=5 \times 10^6$ km. Der Radius r des Dreiecksumkreises beträgt folglich ungefähr $2,89 \times 10^6$ km.
- Der Mittelpunkt dieses Satellitensystems, das ist der Mittelpunkt des Dreiecksumkreises, beschreibt eine Kreisbahn um die Sonne mit dem Radius $R=1$ AE und einer Winkelgeschwindigkeit von 360° pro Jahr. Der Winkelabstand zur Erde beträgt dabei 20° .
- Die Ebene des Satellitensystems (des Dreiecks) ist - stets von der Sonne aus betrachtet - um 60° nach außen gegenüber der Ekliptik geneigt.
- Das Satellitensystem führt innerhalb eines Jahres genau eine Umdrehung in dieser Ebene aus. Rotations- und Revolutionsrichtung sind dabei entgegengesetzt.

Zur Veranschaulichung ist in Abb. 2 die Bahn eines Satelliten in die Ekliptik projiziert dargestellt.

Die mathematische Bahn erfüllt damit folgende Bedingungen:

Durch die Dreieckskonstellation werden zwischen den Satelliten konstante Abstände, die für das Messverfahren wichtig sind, gewährleistet. Die Wahl der Dreiecksseitenlänge, also der Interferometerarmlänge, sorgt für die Abdeckung des gewünschten Frequenzbereichs der Gravitationswellen. Die Bewegung des Systems im Weltraum ermöglicht die Bestimmung der Richtung, aus der die Gravitationswelle kommt. Möglicherweise ist dafür auch die Neigungsänderung der Satellitenebene im Laufe eines Jahres von Bedeutung. Der konstante Abstand zur Erde ist sicher vorteilhaft für die Datenübertragung zwischen Erde und Satellitensystem.

Es stellt sich die Frage, ob die im erklärten Modell beschriebene mathematische Bahn eines Satelliten mit einer Ellipsenbahn, die aus den physikalischen Gesetzmäßigkeiten und der Unabhängigkeit der drei Satelliten voneinander resultiert, übereinstimmt. Einfache Überlegungen ergeben, dass dies nicht der Fall ist. Da-

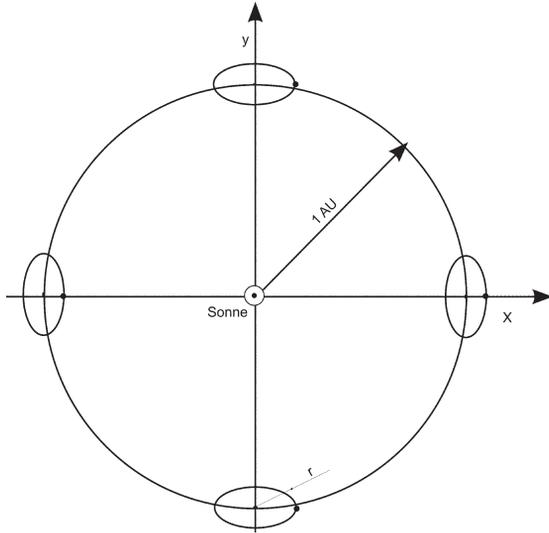


Abb. 2: Projektion eines Satelliten der mathematischen Bahn in die Ekliptik

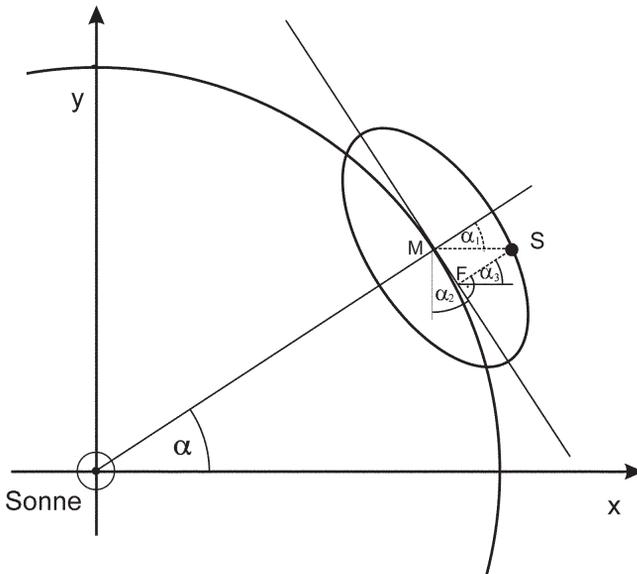


Abb. 3: Skizze zur Festlegung der Winkel für die Herleitung der Gleichungen für die Satellitenbahn

her ist die Abweichung zwischen der mathematischen Bahn und einer an diese angenäherten Ellipse von Interesse. Um sie herauszufinden, muss die mathematische Bahn zunächst mathematisch beschrieben werden.

Anhand von Abbildung 3 lassen sich die kartesischen Koordinaten x , y und z ("Höhe" über der Ekliptik) eines Satelliten in Abhängigkeit von α , dem zurückgelegten Winkel des Systemmittelpunktes im Umlaufkreis und des Satelliten im Dreiecksumkreis, herleiten.

Die durch die Projektion in die x - y -Ebene verzerrten Winkel und Strecken sind durch gestrichelte Linien dargestellt. Der Systemmittelpunkt ist mit M , die Position des Satelliten mit S und der Fußpunkt des Lotes vom Satelliten auf die durch M verlaufende Tangente an die Umlaufbahn mit F bezeichnet.

Für die eingezeichneten Winkel gilt:

$\alpha_1 = \alpha$, wie aus der Definition der Bahn hervorgeht,

$\alpha_2 = \alpha$, da die Schenkel der Winkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, und

$\alpha_3 = \alpha$, da die Schenkel der Winkel paarweise parallel sind.

Exemplarisch sind hier die einzelnen Schritte für die x -Koordinate angegeben:

$$x_M(\alpha) = \cos \alpha \cdot 1AE$$

$$x_F(\alpha) - x_M(\alpha) = \sin \alpha_2 \cdot \overline{MF} = \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot r = \sin^2 \alpha \cdot r$$

$$x_S(\alpha) - x_F(\alpha) = \cos \alpha_3 \cdot \cos 60^\circ \cdot \overline{FS} = \frac{1}{2} \cos \alpha_3 \cdot \cos \alpha_1 \cdot r = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot r$$

$$\Rightarrow x(\alpha) = x_S(\alpha) = \cos \alpha \cdot 1AE + \sin^2 \alpha \cdot r + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot r \quad .$$

Analog ergeben sich die y - und z -Koordinaten des Satelliten:

$$y(\alpha) = \sin \alpha \cdot 1AE - \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot r$$

$$z(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \cdot r$$

Aus dieser mathematischen Beschreibung lassen sich durch Symmetrieuntersuchung der drei Koordinatenfunktionen und zweifache Ableitung der Funktion $z(x)$ folgende qualitative Aussagen über die Bahnform gewinnen: Die mathematische Bahn ist symmetrisch zur x - z -Ebene, und ihre Projektion in diese Ebene ist streng monoton steigend und konvex.

4 Ermittlung von Ellipsenparametern aus der mathematischen Bahn

Da die mathematische Bahn eines Satelliten die durch das Gravitationswellen-Messverfahren bedingten Forderungen erfüllt, soll ihr eine Ellipsenbahn möglichst genau angenähert werden. Im folgenden werden die Parameter der Ellipsenbahnen aus Eckdaten der mathematischen Bahn ermittelt.

Es wird zunächst angenommen, dass die Ellipse durch den höchsten und den tiefsten Punkt der mathematischen Bahn verlaufen soll. Der Winkel δ , den Ellipsebene und Ekliptik dann einschließen, ist gleich dem Anstieg der Geraden durch die beiden entsprechenden Punkte im x - z -Koordinatensystem. Der halbe Abstand zwischen diesen extremen Punkten entspricht der großen Halbachse a der Ellipse. Er ist geringfügig größer als $1AE$. Da jedoch zwecks konstanten Abstands zur Erde die Umlaufzeit des Satellitensystems genau ein Jahr sein soll, wird für die große Halbachse exakt $1AE$ gewählt. Die Ellipse lässt sich dann als durch die extremen Punkte der mathematischen Bahn verlaufend denken, wenn deren Radius R etwas verringert wird. Es ergeben sich als Parameter der Ellipsenbahn:

$$\delta = \arcsin \frac{\sin 60^\circ \cdot r}{1AE} = \arcsin \frac{\sqrt{3}r}{2AE} = \arcsin \frac{L}{2AE} = 0,01671225$$

$$a = 1AE = 1,4961876 \cdot 10^8 \text{ km} .$$

Zur Wahl des für die vollständige Bestimmung der Ellipse noch fehlenden Parameters, das könnte die Exzentrizität oder die kleine Halbachse sein, gibt das mathematische Modell auf den ersten Blick keine zwingenden Anhaltspunkte. Aus den folgenden Überlegungen heraus wird jedoch deutlich, dass und wie der Exzentrizitätswert dem Modell zu entnehmen ist.

Wie mittels der Funktion $z(x)$ leicht zu überprüfen ist, liegt die Sonne nicht in der durch die beiden extremen Punkte gelegten Ebene. Die physikalischen Gesetze erfordern daher, die Sonne in die Ellipsebene hinein zu verschieben oder, anders formuliert, die mathematische Bahn in ihrer Lage gegenüber der Sonne (nicht in ihrer Form) derart zu verändern, dass die Sonne in der Ebene durch ihre beiden extremen Punkte zu liegen kommt. Diese Verschiebung der Sonne darf jedoch aus nachfolgenden Gründen nicht beliebig erfolgen.

Die drei mathematischen Satellitenbahnen gleichen einander in ihrer Lagebeziehung zum Mittelpunkt und zur Ebene des durch den Dreiecksmittelpunkt beschriebenen Kreises, d.h. keine ist vor den anderen ausgezeichnet. Nähert man den drei mathematischen Bahnen drei Ellipsenbahnen in gleicher Weise an, so haben auch diese die gleiche Lage zum mathematischen Mittelpunkt und ihre Brennpunkte den gleichen Abstand von ihm. Sie sind lediglich gegeneinander um 120° verdreht. Sollen die drei Brennpunkte der Ellipsen zusammenfallen, so müssen sie auf der Senkrechten zur Kreisebene (Ekliptik bzw. parallele Ebene) durch den Kreismittelpunkt liegen. Daraus folgt, da der gemeinsame Brennpunkt die Sonne ist, dass die mathematische Bahn gegenüber der Sonne nicht beliebig, sondern nur entlang der z -Achse verschoben werden darf.

Den gesuchten Exzentrizitätswert erhält man, wenn man die Projektion der unverschobenen mathematischen Bahn in die x - z -Ebene betrachtet. Der Mittelpunkt der durch die beiden extremen Bahnpunkte gelegten Geraden hat dann die Koor-

dinaten $(\cos 60^\circ \times r; 0) = (r/2; 0)$. Sein Abstand zur Sonne, die im Koordinatenursprung liegt, beträgt demzufolge $r/2$. Eine Verschiebung der Sonne gegenüber der mathematischen und der dahinein gelegten Ellipsenbahn nach unten in den Brennpunkt vergrößert den Exzentrizitätswert aufgrund des kleinen Neigungswinkels der Ellipse vernachlässigbar. Die Ellipsenparameter werden nun vervollständigt durch:

$$e \approx \frac{r}{2} = \frac{L}{2\sqrt{3}} \approx 1,443375 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \approx 0,009648 \quad .$$

Die auf diese Weise aus der mathematischen Bahn herausgefilterten Ellipsendaten entsprechen den im Pre-Phase A Report angegebenen.

5 Beschreibung der Ellipsenbahnen

Die im Kapitel 4 ermittelten Ellipsenparameter ermöglichen die vollständige Beschreibung der drei Satellitenbahnen. Gegenstand der Untersuchung sollen jedoch nicht nur die Genauigkeit der Näherung der Ellipse an die mathematische Bahn, sondern vor allem die Entfernungen zwischen den drei Satelliten zu einem Zeitpunkt sein. Es ist daher erforderlich, Gleichungen für die Position der Satelliten auf den Ellipsenbahnen in Abhängigkeit von der Zeit aufzustellen.

5.1 Das Einkörperproblem

Der Zusammenhang zwischen der Position eines Satelliten auf einer elliptischen Umlaufbahn und der Zeit ist durch das zweite Keplersche Gesetz, nach dem der Leitstrahl vom Satelliten zum Zentralkörper in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, gegeben. Die mathematische Formulierung dieses funktionalen Zusammenhangs ist als Einkörperproblem bekannt und Ziel dieses Abschnitts.

Die Ellipse werde dazu, wie in Abb. 4 dargestellt, derart in ein rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt, dass ihr Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung und ihre große Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Der Zentralkörper befinde sich auf der negativen x-Achse. Der Satellit starte im Aphel und bewege sich dann im ersten und zweiten Quadranten bis zum Perihel.

Die Bahn, die der Satellit während dieses halben Umlaufs verfolgt, genügt der Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Die vom Satelliten an der Stelle x' überstrichene Fläche setzt sich unter Beachtung der Vorzeichen additiv zusammen aus der Fläche unter dem zurückgelegten Ellipsenbogen (F_1) und der Dreiecksfläche, die durch die x-Achse, den Leitstrahl und das Lot vom Satelliten auf die x-Achse eingeschlossen wird (F_2).

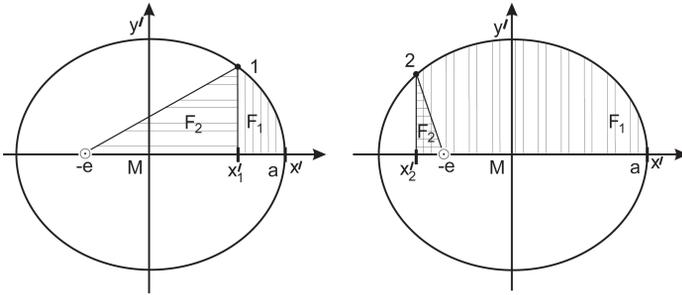


Abb. 4: Anwendung des Flächensatzes

$$F_1 = \int_{x_i'}^a y' dx' = \int_{x_i'}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x'^2} dx' = \frac{b}{2a} \left[x' \sqrt{a^2 - x'^2} + a^2 \arcsin \frac{x'}{a} \right]_{x_i'}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} (e + x_i') \cdot y'(x_i') = \frac{b}{2a} (e + x_i') \sqrt{a^2 - x_i'^2}$$

(F_2 kann auch negativ sein.)

Für die überstrichene Fläche F in Abhängigkeit von der durch x' gegebenen Position gilt:

$$F = F_1 + F_2$$

$$F = \frac{b}{2a} \left(a \sqrt{a^2 - a^2} + a^2 \arcsin \frac{a}{a} - x' \sqrt{a^2 - x'^2} - a^2 \cdot \arcsin \frac{x'}{a} + (e + x') \sqrt{a^2 - x'^2} \right)$$

$$F = \frac{ab\pi}{4} - \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x'}{a} + \frac{be}{2a} \sqrt{a^2 - x'^2} \quad .$$

Die überstrichene Fläche F und die Zeit t sind aufgrund des zweiten Keplerschen Gesetzes proportional zueinander, wobei der Proportionalitätsfaktor die Flächengeschwindigkeit ($ab\pi/T$) mit T als Umlaufzeit des Satelliten ist. Als Funktion $t(x')$ ergibt sich:

$$t(x') = \frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{x'}{a} + \frac{T \cdot e}{2\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2} \quad .$$

Diese Funktion ist nicht analytisch umkehrbar. Die für die weiteren Berechnungen notwendige Inversion kann jedoch mit beliebiger Genauigkeit numerisch mit Hilfe eines Computers erfolgen.

Eine derartige Umkehrung der obigen Funktion liefert die Position des Satelliten für jeden Zeitpunkt innerhalb der ersten Hälfte der Umlaufzeit. Mittels der Beziehung $x'(t) = x'(T-t)$ lässt sich die Positionsangabe auf die Dauer der gesamten Umlaufzeit erweitern.

5.2 Die Positionen der drei Satelliten in einem gemeinsamen Koordinatensystem

Unter Ausnutzung der im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Beziehung sollen nun Gleichungen für die Positionen der drei Satelliten in Abhängigkeit von der Zeit aufgestellt werden.

Das Koordinatensystem sei dabei durch die Sonne als Koordinatenursprung und die Ekliptik als x - y -Ebene bestimmt, wie in Abb. 5 dargestellt. Die große Achse der Ellipse 1 stimme in ihrer Projektion in die x - y -Ebene mit der x -Achse überein; die großen Halbachsen der Ellipsen 2 und 3 sind dann in ihren Projektionen um 120° im mathematisch positiven bzw. negativen Sinn gedreht. In der Abbildung 5 sind die Projektionen der Ellipsen in die x - y -Ebene gezeichnet.

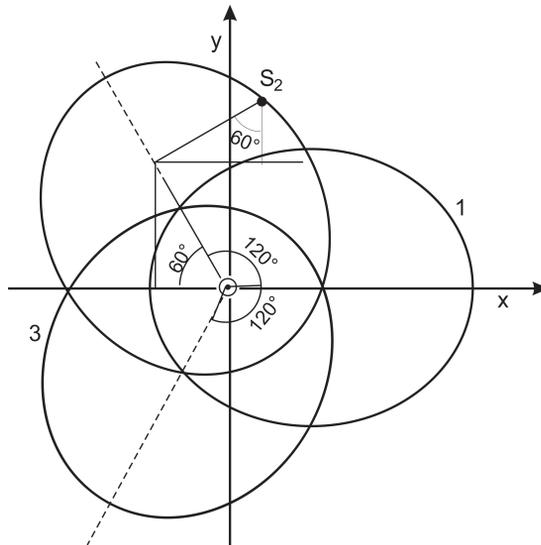


Abb. 5: Beziehungen zur Herleitung der Satellitenpositionen

Die tatsächlichen Ellipsenbahnen sind gegenüber der Ekliptik um δ geneigt. (Die in der Darstellung gewählte hohe Exzentrizität der Ellipsen dient lediglich der Anschaulichkeit und stimmt nicht mit der wirklichen, in Kapitel 4 ermittelten Exzentrizität überein).

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich Satellit 1 im Aphel. Die Satelliten 2 und 3 erreichen das Aphel ihrer Bahnen zu den Zeiten $t = 1/3 T$ bzw. $t = -1/3 T = 2/3 T$. (Die folgenden Klammerausdrücke, die t enthalten, sind keine Faktoren, sondern Argumente von x').

Wie in Abschnitt 5.1 gibt x' jeweils die Position eines Satelliten im Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Ellipsenmittelpunkt und dessen x -Achse mit

der großen Ellipsenachse zusammenfällt, an. Im gemeinsamen Koordinatensystem aller drei Ellipsen ist der Abstand zwischen der Sonne und dem Fußpunkt des Lotes vom Satelliten auf die große Achse daher $(x' + e)$.

Für die Satelliten 2 und 3 setzen sich die x - und y -Koordinaten unter Beachtung der Vorzeichen additiv aus den Kathetenabschnitten der rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypothenusen die Projektionen der zu den Ellipsenachsen parallelen Komponenten des Abstandes vom Brennpunkt sind, zusammen.

Für die Positionen der Satelliten 1 und 2 gilt:

$$x_1(t) = \cos \delta \cdot (x'(t) + e)$$

$$y_1(t) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x'(t))^2} \quad (*)$$

$$z_1(t) = \sin \delta \cdot (x'(t) + e)$$

$$x_2(t) = -\cos \delta \left(x' \left(t - \frac{1}{3} T \right) + e \right) \cdot \cos 60^\circ \mp \sin 60^\circ \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(x' \left(t - \frac{1}{3} T \right) \right)^2} \quad (**)$$

$$y_2(t) = \cos \delta \cdot \left(x' \left(t - \frac{1}{3} T \right) + e \right) \cdot \sin 60^\circ \mp \cos 60^\circ \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(x' \left(t - \frac{1}{3} T \right) \right)^2} \quad (**)$$

$$z_2(t) = \sin \delta \cdot \left(x' \left(t - \frac{1}{3} T \right) + e \right) \quad (**)$$

$$(*) \quad + \text{ für } (0+n) \cdot T \leq t \leq (0,5+n) \cdot T \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

$$(**) \quad - \text{ für } (0+n) \cdot T \leq t - \frac{1}{3} T \leq (0,5+n) \cdot T \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + n \right) \cdot T \leq t \leq \left(\frac{5}{6} + n \right) \cdot T$$

Die Koordinaten des dritten Satelliten unterscheiden sich von denen des zweiten nur durch Vorzeichen.

6 Ergebnisse der Abstandsberechnungen

Die mit den aufgestellten Gleichungen gegebene vollständige mathematische Beschreibung der drei Ellipsenbahnen sowie der mathematischen Bahn ermöglicht es, sowohl die Abstände zwischen je zwei Satellitenpaaren als auch zwischen einer physikalischen Ellipsenbahn und der dazugehörigen mathematischen Bahn zu bestimmen.

Mit Hilfe von Microsoft Excel und Turbo Pascal wurden die gewünschten Berechnungen durchgeführt. Eine Auswertung der Excel-Daten ergibt, dass die Ab-

stände zwischen zwei Satelliten bei Wahl der in Abschnitt 4 ermittelten Parameter maximal um 0,8 % von den geforderten 5×10^6 km abweichen. Das entspricht 40000 km. Der Abstand zwischen den Positionen des Satelliten 1 auf der mathematischen und der physikalischen Bahn liegt meistens bei ca. 20000 km und übersteigt in keinem Fall 50000 km. Anstelle der in Excel vorgenommenen linearen Interpolation zwischen exakten Wertepaaren wurde im Turbo-Pascal-Programm das bekannte Halbierungsverfahren zur Nullstellenberechnung angewandt, um die Funktion $t(x')$ zu invertieren.

Diese bessere Näherung liefert eine maximale Abstandsabweichung von nur 30000km, also 0,6%. Der zeitliche Verlauf des Abstandes zwischen zwei Satelliten während eines Umlaufs ist in Abb. 6 zu sehen.

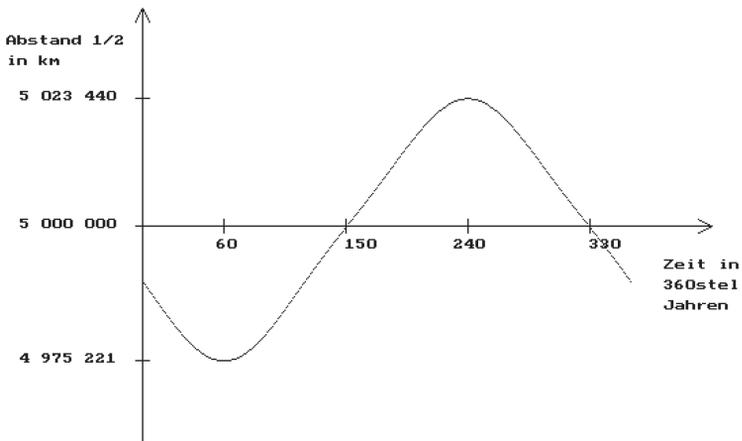


Abb. 6: Zeitlicher Verlauf des Abstandes zwischen den Satelliten 1 und 2

7 Wertung der Ergebnisse und Schlussbetrachtung

Wie aus den vorangehend zusammengefassten Ergebnissen ersichtlich, ist die vorgenommene Annäherung von Ellipsen an die mathematische Bahn sehr gut. Die Schwankungen des Abstandes zwischen zwei Satellitenpaaren und damit der Armlänge des Interferometers sind um Größenordnungen geringer als diese selbst. Die Genauigkeit, mit der die anhand des mathematischen Modells ermittelten Ellipsen die Forderung nach einer relativ konstanten Armlänge des Interferometers erfüllen, ist einerseits erstaunlich. Andererseits sind die Abweichungen angesichts der Kleinheit des zu messenden Effekts - die erwartete Längenänderung liegt in der Größenordnung von 10^{-10} m - beträchtlich.

Diese Diskrepanz gibt Anlass zur tieferen Beschäftigung mit dem technischen Konzept des Projektes LISA, der Bahngestaltung der Satelliten und den physika-

lischen Grundlagen, insbesondere der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Natur von Gravitationswellen. Mit dem gegebenen kleinen Einblick in ein hochinteressantes Forschungsvorhaben stieß ich bereits an die Grenzen meiner mathematischen und rechnerischen Möglichkeiten sowie räumlichen Vorstellungskraft. Fragen und Antworten des Projektes LISA werden sicherlich noch unbekannte Grenzen in Raum und Zeit durchbrechen.

8 Danksagung

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Neugebauer von der Friedrich-Schiller-Universität Jena für die Anregung zu diesem interessanten Projekt und bei meinen Betreuern Herrn Dr. Kleinwächter, ebenfalls von der FSU Jena, und Herrn Brenner vom Albert-Schweitzer-Gymnasium Erfurt für ihre großzügige Unterstützung meiner Arbeit.

9 Literaturverzeichnis

- [1] DANZMANN, KARSTEN: „Pre-Phase A Report. LISA Laser Interferometer Space Antenna for the detection and observation of gravitational waves“, Garching, 1995
- [2] WILL, CLIFFORD: „...und Einstein hatte doch recht“, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1989