

# BEITRAG AUS DER REIHE:

Karl-Heinz Lotze, Werner B. Schneider (Hrsg.)

## Wege in der Physikdidaktik Band 5 Naturphänomene und Astronomie

ISBN 3 - 7896 - 0666 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 2002

### Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.  
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle  
genutzt werden. Auf der Homepage

[www.solstice.de](http://www.solstice.de)

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

Uwe Schröter

## Allgemeine Relativitätstheorie mit Mitteln der Schulmathematik

### 1 Warum in der Schule Allgemeine Relativitätstheorie unterrichten?

Die Ergebnisse und astrophysikalischen Folgerungen aus der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie sind in den letzten Jahren mehr und mehr in das Interesse der Öffentlichkeit gerückt. Ursache dafür sind zumeist die scheinbar „mit dem logischen Menschenverstand“ nicht mehr zu fassenden und gerade deshalb interessierenden Phänomene wie Zeitdilatation, Längenkontraktion, Krümmung der Raum-Zeit, Gravitationslinseneffekt, Expansion eines „unendlichen“ Universums oder die physikalischen Vorgänge in der Umgebung Schwarzer Löcher.

Populärwissenschaftliche Veröffentlichungen wie etwa Stephen Hawkings „Eine kurze Geschichte der Zeit“ erstürmten innerhalb von Wochen die Listen der Bestseller, wurden mehrfach verlegt und hinterließen - häufig aus Gründen des Verzichts auf jegliche mathematische Darstellung - beim aufmerksamen Leser trotzdem oft mehr Fragen als Antworten. Neben solchen (trotz des genannten Mangels) inhaltlich als qualitativ hochwertig einzustufenden Veröffentlichungen gibt es leider aber auch eine Vielzahl von Publikationen und Fernsehbeiträgen, welche selbst ein Mindestmaß an wissenschaftlicher Genauigkeit und Sauberkeit in der physikalischen Darstellung vermissen lassen. Dieser Situation steht - hier auf die Physik bezogen - eine ständig wachsende Diskrepanz zwischen den Inhalten der modernen Wissenschaft und der traditionell in der Schule unterrichteten „Wissenschaft“ gegenüber. Während beispielsweise die Spezielle Relativitätstheorie noch Bestandteil der Lehrpläne fast aller Bundesländer ist, bleibt (für den Schüler unverständlicherweise und im Gegensatz zu dem bei ihm sehr häufig vorhandenen Interesse) die Allgemeine Relativitätstheorie, welche die Grundlage für das Verständnis vieler Phänomene der modernen Astrophysik darstellt, nahezu völlig ausgeklammert.

Als Repräsentant der Wissenschaft sollte die Schule den Einblick in ein solches modernes Arbeitsgebiet der Naturwissenschaften aus oben genannten Gründen aber nicht den Medien überlassen. Sie sollte in der Lage sein, dem Schüler eine wissenschaftlich einwandfreie und möglichst auch anschauliche Einführung in das Wesen derjenigen Erscheinungen zu geben, welche im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt und/oder beobachtet wurden. Dies gilt insbesondere deshalb, weil die Inhalte der Einsteinschen Theorie nicht nur ein großes Potential an Interesse und unbeantworteten Fragen beherbergen, sondern weil sie auch Erkenntnisse im Zusammenhang mit Weltanschauungsfragen (z.B. Kosmologie) darstellen.

Ich hatte 1998/1999 am Weimarer Schiller-Gymnasium die Möglichkeit, in einem Leistungskurs der Klasse 12 grundlegende Inhalte der modernen Gravitationstheorie vermitteln zu können. Unter Zugrundelegung des Äquivalenzprinzips der Allgemeinen Relativitätstheorie und mit Hilfe von Gedankenexperimenten war es möglich, ausgewählte Inhalte der Allgemeinen Relativitätstheorie auch ohne aufwendigen mathematischen Apparat zu unterrichten. Besonderer Wert wurde dabei auf die anschauliche Darstellung der physikalischen Konzeption dieser Theorie gelegt. Weniger Beachtung konnten in diesem Rahmen hingegen genaue quantitative Analysen der vorhergesagten Effekte finden. Herleitungen und Berechnungen blieben demzufolge meistens auf das Feststellen von Größenordnungen beschränkt, ohne dass aber der Bezug zur Wissenschaftlichkeit und zu den Theorieergebnissen verloren wurde.

## 2 Das Äquivalenzprinzip

Ausgangspunkt der Betrachtungen zur Unterrichtsreihe „Allgemeine Relativitätstheorie“ war das Äquivalenzprinzip:

- I) *In einem kleinen Labor, das in einem Schwerfeld frei fällt, sind die Gesetze der Physik dieselben wie jene, die ohne Schwerfeld in einem lokalen Inertialsystem gelten.*
- II) *Alle physikalischen Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen und in Schwerfeldern sind äquivalent. Durch beliebige Messungen innerhalb eines Bezugssystems kann nicht entschieden werden, ob dieses in einem Gravitationsfeld ruht oder durch eine äußere Kraft beschleunigt wird.*

Die Aussage I) ergibt sich unmittelbar aus der Ununterscheidbarkeit von „träger“ und „schwerer“ Masse: Für einen Beobachter in einem frei fallenden System (die Schüler belustigt hier häufig das Denkmodell eines frei fallenden Fahrstuhles) gilt - so zeigt es die Galilei-Transformation - das Newtonsche Grundgesetz in seiner einfachsten Form.

Das genannte System ist somit Inertialsystem. Die Begründung, warum das Labor klein sein muss, geben die Schüler selbst: Da das Schwerfeld ein Zentralkraftfeld darstellt, würden sich im ausgedehnten Labor befindliche Massepunkte während des Falles mehr und mehr annähern. Der Beobachter im Labor „Fahrstuhl“ würde somit durch Messungen Rückschlüsse auf das Bewegungsverhalten seines Systems ziehen können. Ist das Labor jedoch hinreichend klein, darf das Gravitationsfeld näherungsweise als homogen angesehen werden, Abweichungen in den Messungen des mitfallenden Beobachters sind vernachlässigbar gering.

Aussage II) kann mit Hilfe eines von Einstein in [3] beschriebenen Gedankenexperimentes veranschaulicht werden: Ein Kasten von der Größe eines Zimmers befindet sich, weit entfernt von Massen beliebiger Art, irgendwo im Weltraum. Wird dieser Kasten mit einem darin befindlichen Beobachter durch eine von außen einwirkende Kraft mit  $9,81 \text{ m/s}^2$  beschleunigt, so ist es dem Beobachter

(vorausgesetzt, der Blick in die Welt außerhalb des Kastens bleibt diesem versperrt) nicht möglich, zu entscheiden, ob er sich beschleunigt bewegt oder im Schwerfeld der Erde ruht.

Die Aussagen I) und II) erlauben es, auf einfache Weise unter Zuhilfenahme von Gedankenexperimenten folgende Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu begründen: die Gravitation -Rotverschiebung, die Gravitations-Zeitdilatation sowie die Lichtablenkung in der Umgebung großer Massen.

### 3 Die Gravitations-Rotverschiebung

Für die Ableitung einer diesen Effekt beschreibenden Gleichung gibt es im Rahmen der Unterrichtsreihe zwei Möglichkeiten.

#### Erste Variante (nach [2]):

Ein (durchsichtiger) Fahrstuhl sei an einer Aufhängung im Fahrstuhlschacht so angebracht, dass er in Bezug auf den Schacht ruht (Abbildung 1). In dem Augenblick, in welchem die Aufhängung (Seil) zerschnitten wird, werde von einer am Kabinenboden befindlichen Lampe ein Lichtblitz der Wellenlänge  $\lambda$  in Richtung Kabinendecke emittiert. Nach dem Zerschneiden des Seiles befindet sich der Fahrstuhl im Zustand des freien Falles. Der im Fahrstuhl befindliche Beobachter A registriert in diesem dieselben physikalischen Gesetzmäßigkeiten, wie sie auch ohne Vorhandensein eines äußeren Schwerfeldes beobachtet werden könnten. Nach dem Äquivalenzprinzip stellt sein Labor „Fahrstuhl“ ein Inertialsystem dar. In seiner Beobachtungsposition (knapp unterhalb der Fahrstuhldecke) misst er daher für das ankommende Licht dieselbe Wellenlänge  $\lambda$ , mit der das Licht vom Kabinenboden aus abgestrahlt wurde.

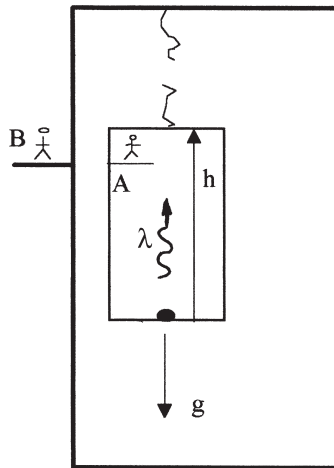


Abb. 1: In einem frei fallenden Fahrstuhl wird vom Boden ein Lichtblitz ausgesandt.

Die Laufzeit des Lichtes beträgt vom Kabinenboden bis zur Kabinendecke

$$t = \frac{h}{c} .$$

Der im Fahrstuhl schacht befindliche Beobachter B ruht im Gravitationsfeld. Wegen der in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr vernachlässigbaren Schwerkraftwirkung stellt der Fahrstuhlschacht hier kein Inertialsystem dar. In dem Augenblick, in welchem das Licht an der Fahrstuhldecke eintrifft, stehen Beobachter B und Beobachter A sich gegenüber. Auch der Beobachter B registriert das ankommende Licht, allerdings mit einer größeren Wellenlänge. Ursache dafür ist der Doppler-Effekt: Der Lichtblitz durchquerte die Entfernung  $h$ , während sich der Fahrstuhlboden mit der Geschwindigkeit

$$v = gt = g \frac{h}{c}$$

von B wegbewegte. Die Fallbeschleunigung  $g$  werde für einen geringen Bereich oberhalb der Erdoberfläche als konstant angenommen. Somit folgt für den Quotienten aus Fallgeschwindigkeit des Fahrstuhles und Lichtgeschwindigkeit

$$\frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2} .$$

Der Doppler-Effekt werde mit Hilfe der relativistischen Doppler-Gleichung beschrieben:

$$\lambda_E = \lambda_S \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} .$$

Für Geschwindigkeiten  $v \ll c$  ist für diese Gleichung folgende Näherung erlaubt:

$$\lambda_E = \lambda_S \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \lambda_S \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c}}\right)} \approx \lambda_S \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \lambda_S \left(1 + \frac{v}{c}\right) .$$

(Bemerkungen:  $E$  steht in dieser Gleichung für „Empfänger“,  $S$  für „Sender“. Die Näherung ist bereits bei der Behandlung der Speziellen Relativitätstheorie unumgänglich und daher den Schülern bekannt.)

In diesem Falle beobachtet Beobachter B eine Verschiebung der Spektrallinien

des Lichtes hin zu größeren Wellenlängen (Rotverschiebung). Würde sich im umgekehrten Fall Licht in einem fallenden Kasten abwärts bewegen, so würde Beobachter B eine Blauverschiebung registrieren können. Die Verschiebung der Spektrallinien gibt man üblicherweise über eine Maßzahl  $z$  an:

$$z = \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S} = \frac{(\lambda_S + \lambda_S \frac{v}{c}) - \lambda_S}{\lambda_S} = \frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2} .$$

Ist  $z > 0$ , registriert der Beobachter eine Rotverschiebung, dementsprechend für  $z < 0$  eine Blauverschiebung. Eine Gleichung für die Gravitationsrotverschiebung ist somit gegeben durch

$$z = \frac{gh}{c^2} . \quad (1)$$

Der Effekt der Gravitations-Rotverschiebung wurde 1960 von den amerikanischen Wissenschaftlern Pound, Rebka und Snider experimentell nachgewiesen. Dabei wurde eine  $\gamma$ -Strahlungsquelle auf dem Fußboden des 22,6 m hohen Turmes der Harvard - Universität abgelegt und an der Decke ein Absorber angebracht, mit welchem die ankommende Wellenlänge gemessen werden konnte.

Die Strahlungsquelle sendet eine elektromagnetische Welle der Frequenz  $f$  aus, der die Energie  $E = 14,4 \text{ keV}$  entspricht. Mit Hilfe der Gleichung (1) lässt sich die zu erwartende Rotverschiebung mit  $z = 2,5 \times 10^{-15}$  bestimmen. Nachfolgende Experimente konnten die Genauigkeit der Meßergebnisse im Vergleich zur Theorie bis auf 1% steigern.

### Zweite Variante (nach [3]):

Von der Oberfläche eines Himmelskörpers werde ein Lichtsignal der Wellenlänge  $\lambda_S$  und der Frequenz  $f_S$  emittiert (vgl. Abb. 2).

Dieses Lichtsignal trifft in sehr großer Entfernung auf den Empfänger E.



Abb. 2: Bestimmung der Gravitations-Rotverschiebung in großen Entfernungen.

Um das Gravitationsfeld verlassen zu können, muss vom Photon eine Arbeit  $W$  verrichtet werden. Diese Arbeit entspricht einer Energieänderung  $\Delta E$  des Photons:

$$\Delta E = h \cdot \Delta f = h(f_S - f_E)$$

d.h. die Energieänderung schlägt sich in einer Frequenzverminderung und damit in einer Wellenlängenvergrößerung nieder. Die Größe  $h$  stellt hier das Plancksche Wirkungsquantum dar. Die zu verrichtende Arbeit ist

$$W = \frac{GM}{R} \cdot m_{\text{dyn},\gamma} \quad (m_{\text{dyn},\gamma}: \text{„dynamische Masse“ des Photons}).$$

Wegen  $E = mc^2$  gilt:  $m_{\text{dyn},\gamma} = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$   
und damit

$$W = \frac{GM}{R} \cdot \frac{hf_S}{c^2}$$

Wegen  $W = \Delta E$  folgt:

$$f_S - f_E = \frac{GM}{Rc^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f_S - f_E}{f_S} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{R_S}{2R} \quad (2)$$

wenn an dieser Stelle zunächst nur als Abkürzung die Größe  $R_S$  („Schwarzschildradius“) eingeführt wird.

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Die Rotverschiebung  $z$  ist definiert durch :  $z = \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S}$  d.h. es soll nun der

Zusammenhang (2) mit Hilfe der Wellenlängen dargestellt werden. Aus:

$$f_S - f_E = \frac{R_S}{2R} \cdot f_S \quad \text{folgt:} \quad \frac{c}{\lambda_S} - \frac{c}{\lambda_E} = \frac{R_S}{2R} \cdot \frac{c}{\lambda_S}$$

Durch Umstellen, Kürzen und Anwendung der Rundungsregel  $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$  (für kleine  $x$ ) kommt man auf die Beziehung

$$\lambda_E = \left( \frac{1}{1 - \frac{R_S}{2R}} \right) \cdot \lambda_S \approx \left( 1 + \frac{R_S}{2R} \right) \cdot \lambda_S \quad ,$$

welche nur für  $R_S \ll R$  Gültigkeit besitzt. Daraus folgt für die Rotverschiebung :

$$z = \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S} = \frac{R_S}{2R} = \frac{GM}{Rc^2} \quad (3)$$

Diese Gleichung stellt eine Erweiterung von (1) dar, da nun auch die Rotverschiebung für sehr große Entfernungen zwischen Beobachter und einer Lichtquelle in einem Gravitationsfeld berechnet werden kann.

Der Term ist die Änderung des Gravitationspotentials  $\Delta U$  desjenigen Himmelskörpers, welcher durch sein Schwerfeld die Rotverschiebung hervorruft. Für kleine Entfernungen zwischen Beobachter und Lichtquelle gilt:  $\Delta U = g h$ . Setzt man diesen Zusammenhang in Gleichung (3) ein, ergibt sich unmittelbar die Gleichung (1).

Wegen der angeführten Näherungen und der Vernachlässigung der Raum-Zeit-Geometrie gilt (1) und (3) ausschließlich unter der Bedingung  $R_S \ll R$ . Die exakte, aus der Allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitete Gleichung ist

$$z = \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}} - 1 \quad (4)$$

mit welcher auch die Gravitations-Rotverschiebung z.B. in der Umgebung Schwarzer Löcher berechnet werden kann [4].

Beide Möglichkeiten der Ableitung einer Gleichung für die Gravitations - Rotverschiebung haben im Rahmen der Unterrichtsreihe ihre Berechtigung. In Variante 1 wird dem Schüler der Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und Äquivalenzprinzip sehr schnell deutlich, weil hier das mit dem Äquivalenzprinzip eingeführte Modell des frei fallenden Fahrstuhles aufgegriffen wird.

In Variante 2 ist das Äquivalenzprinzip, weil in „verkleideter“ Form auftretend, schwerer erkennbar. In dieser Ableitung wurde in jenem Augenblick das Äquivalenzprinzip angewendet, als die „träge“ Masse  $hf/c^2$  als passive schwere Masse in die Newtonsche Formel für die Arbeit eingesetzt wurde.

#### 4 Gravitations-Zeitdilatation

Auch der Effekt der Zeitdilatation im Gravitationsfeld lässt sich dem Schüler mit Hilfe eines Gedankenexperimentes anschaulich darstellen (vgl. Abbildung 3). Dabei wird auf den nun bekannten Effekt der Gravitations-Rotverschiebung zurückgegriffen [8]:

Zwei Atome ruhen zusammen mit drei Uhren in einem Gravitationsfeld. Atom B besitzt dabei mit einer Uhr und einer zugehörigen Vergleichsuhr eine größere Höhe als Atom A mit seiner zugehörigen Uhr. Das untere Atom sendet Licht aus, welches bei Atom B nach der Beziehung:



$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{gh}{c^2}$$

rotverschoben ankommt. Die Lichtabstrahlung erfolge so, dass mit jedem Umlauf des Elektrons um den Atomkern ein Wellenberg ausgesandt wird. Gelangt der Wellenberg zur zugehörigen Uhr, wird der Zeiger dieser Uhr um 1s vorgerückt. Das Atom B ist genauso konstruiert wie Atom A und strahlt mit der gleichen Wellenlänge Licht aus. Die Zahl der von B emittierten Wellenberge wird analog wie beim unteren Atom mit Hilfe der zugehörigen Uhr gemessen.

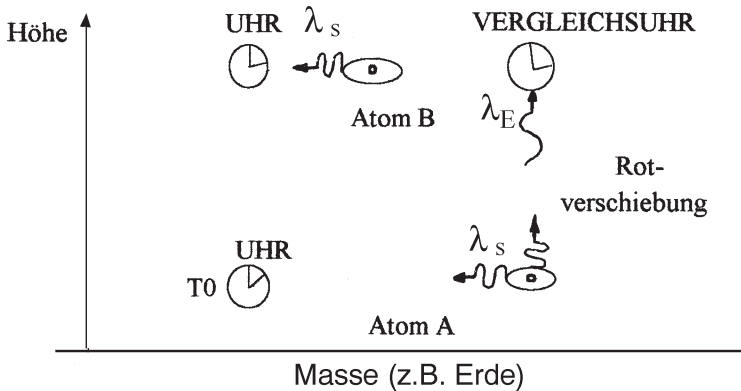


Abb. 3: Uhren im Grvitationsfeld

Außerdem befindet sich in der Höhe von B eine Vergleichsuhr. Diese Uhr registriert diejenigen Wellenberge, welche vom tiefer liegenden Atom A „abgestrahlt“ werden. Aufgrund der Gravitations-Rotverschiebung vergrößert sich nun entlang des Lichtweges der Abstand zwischen diesen Wellenbergen. Das heißt aber nichts anderes, als dass sich die Zeiger der Vergleichsuhr langsamer vorwärts bewegen als die Zeiger der anderen in gleicher Höhe angebrachten Uhr. Aus Sicht eines Beobachters bei B scheinen diejenigen Vorgänge unter ihm, welche tiefer im Gravitationsfeld stattfinden, mit einer anderen Zeit abzulaufen als analoge Vorgänge in seiner unmittelbaren Umgebung. Folgerung:

In der Umgebung schwerer Massen erfolgt der Zeitablauf verlangsamt. Uhren in großer Höhe über der Masse gehen schneller als Uhren in geringerer Höhe. Die Größe dieses Effektes lässt sich wie folgt ableiten:

Gleichung (1) ist identisch mit : 
$$\frac{\lambda_E}{\lambda_S} - 1 = \frac{gh}{c^2} .$$

Mit jedem von A ausgesandten Wellenberg rückt der Zeiger der zugehörigen wie

auch der höher gelegenen Vergleichsuhr um 1s vor. Da mit Hilfe der Uhren die Zeit  $T$  bestimmt wird, gilt für die jeweils abgelesenen Zeiten:  $T_S \sim \lambda_S$  und  $T_E \sim \lambda_E$  ( $S$ : Sender bzw. Strahlungsquelle, befindet sich tiefer im Gravitationsfeld als der Empfänger,  $E$ : Empfänger). Aufgrund dieser Proportionalitäten gilt:

$$\frac{T_E}{T_S} - 1 = \frac{gh}{c^2}$$

und damit

$$T_E = \left(\frac{gh}{c^2} + 1\right)T_S . \quad (5)$$

Diese Gleichung läßt sich auf gleiche Weise wie bei der Gravitations-Rotverschiebung für große Entfernungen verallgemeinern:

$$T_E = \left(\frac{GM}{Rc^2} + 1\right)T_S = \left(\frac{R_S}{2R} + 1\right)T_S . \quad (6)$$

Die Gültigkeit beider Gleichungen ist auch hier auf  $R_S \ll R$  eingeschränkt.

Um dem Schüler die Größenordnung der Gravitations - Zeitdilatation unter irdischen Bedingungen vor Augen zu führen, ist es sinnvoll, folgende Überlegung anzustellen: Ein Bergsteiger besteige mit einer Uhr den Mt. Everest (8900 m) und bleibt dort 65 Jahre. Eine Vergleichsperson, wohnhaft in Meeresspiegellhöhe, hat zuvor ihre Uhr mit der des Bergsteigers synchronisiert. Nach genau 65 Jahren wird die Zeitdifferenz gemessen. Sie beträgt - die Berechnung ist einfach - zwei Millisekunden.

Messtechnisch konnte die Gravitations-Zeitdilatation 1971 von den amerikanischen Wissenschaftlern Hafele und Keating nachgewiesen werden.

## 5 Lichtablenkung im Schwerfeld

Wir ziehen nun die zweite Aussage des Äquivalenzprinzips zur Erklärung der Lichtablenkung im Schwerfeld heran.

Ein Beobachter befinde sich in einem Kasten, welcher ohne Vorhandensein eines Schwerfeldes im leeren Raum mit  $a$  beschleunigt werde. In diesem Kasten befinde sich genau wie im vorherigen Gedankenexperiment eine Lichtquelle  $Q$ , von welcher in der (in Bewegungsrichtung gemessenen) Höhe  $h$  ein Lichtstrahl in Richtung einer Leinwand  $L$  ausgesandt wird. Der in der Leinwand eingebrannte Fleck  $F$  besitzt nun nicht mehr die Höhe  $h$ , sondern liegt aufgrund der „Trägheit“ des abgestrahlten Lichtes etwas tiefer (Abbildung 4). Gemäß der zweiten Aussage des Äquivalenzprinzips wird der Beobachter, wenn er nun mit seinem Kasten innerhalb eines Schwerfeldes bei gleicher Versuchsanordnung und der Fallbeschleunigung  $g = a$  ruht, dieselben Erscheinungen wahrnehmen können, wie im

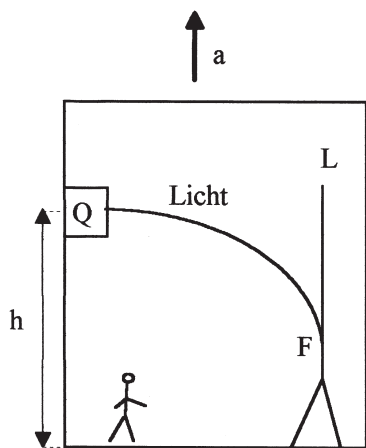


Abb. 4: Skizze zu den Beobachtungen in einem sich beschleunigt bewegenden Kasten

zuvor beschleunigten System. Er wird ohne Überschreitung der Grenzen seines Systems weder experimentell noch durch Beobachtung entscheiden können, ob sein Kasten außerhalb eines Gravitationsfeldes beschleunigt wird, oder ob er innerhalb des Schwerfeldes ruht. Der im beschleunigten Kasten beobachtete Lichtweg ist demzufolge derselbe wie in dem im Schwerfeld ruhenden System. Folgerung: Lichtwege werden im Gravitationsfeld gekrümmt.

Bereits ohne Vorkenntnisse aus der Allgemeinen Relativitätstheorie bemühte sich im Jahre 1801 J.G. von Söldner, eine Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld der

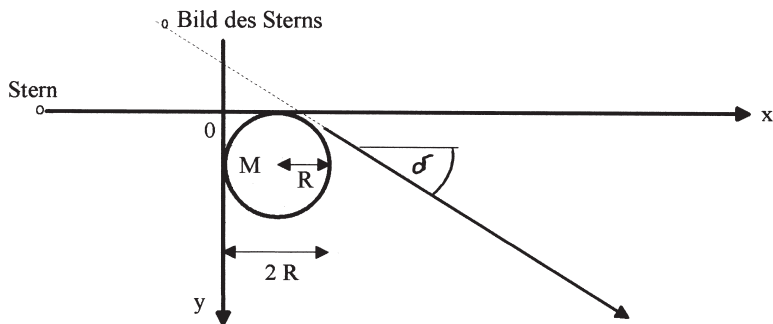


Abb. 5: Lichtablenkung am Sonnenrand

Sonne theoretisch vorherzusagen. Auf der Basis der mechanischen Lichtkorpustheorie ging er davon aus, dass das Licht als Strom von Masse-Teilchen unter dem Einfluss des Schwerfeldes der Sonne abgelenkt werden müsse. Albert Einstein bestätigte 1911 auf der Basis der Newtonschen Theorie dieses Resultat. Noch ohne ein theoretisches Fundament für die Allgemeine Relativitätstheorie zu besitzen, war es ihm möglich, zumindest von der Größenordnung her den Effekt der Lichtablenkung (genauer: den Ablenkwinkel) am Rand der Sonne zu berechnen. Ein Aufgreifen dieser Berechnungsidee ist trotz seiner (nur) klassischen Basis (d.h. die Betrachtung erfolgt im euklidischen Raum) im Rahmen des Unterrichtes durchaus sinnvoll, da mit ihr zumindest die Größenordnung des Ablenkeffektes veranschaulicht werden kann (Abbildung 5):

Die Gestalt der Lichtbahn hat nach  $x = ct$  und  $y = \frac{g}{2}t^2$  ( $g$  sei die Fallbeschleunigung an der Sonnenoberfläche) die Gestalt der Wurfparabel  $y = \frac{g}{2} \frac{x^2}{c^2}$ .

Mit der Beziehung  $g = \frac{GM}{R^2}$  ergibt sich

$$y = \frac{1}{4} \frac{2GM}{c^2} \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} R_s \frac{x^2}{R^2},$$

wenn  $R_s$  als Schwarzschildradius der Sonne eingesetzt wird. Unter der Annahme, dass das Licht nur im Bereich  $0 \leq x \leq 2R$  abgelenkt wird (gerade Lichtbahn für  $x \leq 0$  und  $x \geq 2R$ ), ist es möglich, mit  $x = 2R$  den Ablenkwinkel  $\delta$  zu bestimmen:

$$\tan \delta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{x R_s}{R^2} = \frac{R_s}{R}$$

Da für die Sonne das Verhältnis  $R_s/R$  mit der Größenordnung  $10^{-6}$  sehr klein ist, darf die Näherung  $\tan \delta \approx \delta$  verwendet werden. Der Ablenkwinkel berechnet sich daher über

$$\delta = \frac{R_s}{R}$$

für am Sonnenrand vorbeiziehendes Licht. Dieser Wert stellt genau die Hälfte des mit der Allgemeinen Relativitätstheorie abgeleiteten Wertes dar, welche die zusätzliche Krümmung der Raum-Zeit in der Umgebung großer Massen in ihre Untersuchungen mit einbezieht. Hier gilt:

$$\delta_{ART} = 2 \frac{R_s}{R} = 8,57 \cdot 10^{-6} = 1,75''$$

## 6 Verhalten von Maßstäben im Gravitationsfeld [8]

Das Phänomen der Längenkontraktion ist den Schülern aus der Behandlung der Speziellen Relativitätstheorie bekannt. So wie die Zeitdilatation durch speziell- und allgemeinrelativistische Effekte hervorgerufen werden kann, gibt es auch zur Längenkontraktion eine Entsprechung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Eine Ableitung der zugehörigen Gleichung ist mit mathematischen Schulkenntnissen nicht möglich. Trotzdem ist die Behandlung des Sachverhalts im Rahmen dieser Unterrichtsreihe sehr sinnvoll, führt er doch auf anschaulichem Wege zum eigentlichen Untersuchungsgegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie: der Geometrie der Raum-Zeit in der Umgebung von Gravitationsfeldern. Ein Maßstab, welcher sich in einem Gravitationsfeld befindet, schrumpft um den Faktor

$$1 - \frac{GM}{Rc^2} .$$

Seine Länge beträgt dann:

$$L = \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)L_0 .$$

$L_0$  ist dabei die Länge des Maßstabes ohne Vorhandensein eines Gravitationsfeldes.

Zumindest prinzipiell kann diese Tatsache für den Schüler erklärbar gemacht werden. Abb. 6 zeigt eine Fläche, welche die Sonne und den sie umgebenden Raum in zwei Teile schneidet. Auf der Schnittfläche wurden Maßstäbe so ausgelegt, dass eine Messung von Umfang und Durchmesser eines Kreises um das Gravitationszentrum herum durchgeführt werden kann. Zählt man die angelegten Maßstäbe ab und bestimmt auf diese Weise Umfang ( $u$ ) und Radius ( $r$ ) des Kreises, so ergibt sich ein Verhältnis  $u/r < 2\pi$ . (7)

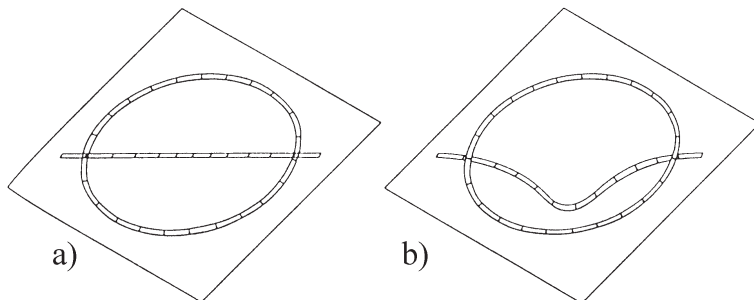


Abb. 6: Geometrie in der Sonnenumgebung (aus [8])

Für die Deutung dieses Resultates gibt es zwei Möglichkeiten:

*Deutung 1:* Die Schnittfläche ist eine Ebene, auf welcher die Maßstäbe schrumpfen. Die Struktur des Raumes in der Umgebung der Masse ist somit festgelegt (euklidischer Raum), durch Experimente und durch Beobachtung muss Auskunft über das Verhalten dieser Maßstäbe auf der Ebene gesucht werden.

*Deutung 2:* Jeder Maßstab hat immer die gleiche Länge, gleichgültig in welcher Position des Raumes er sich befindet. Wegen Glg. (7) ist jedoch die euklidische Geometrie nicht mehr auf diese Situation anwendbar. Der die Masse umgebende Raum ist gekrümmt, die metrischen Verhältnisse in diesem Raum müssen mit Hilfe einer von Bernhard Riemann (1826 - 1866) erarbeiteten Geometrie beschrieben werden.

## 7 Ausblick

Alle bisherigen Ausführungen stellen aufgrund des begrenzten Platzumfanges für diesen Beitrag nur einen kleinen Einblick in die Inhalte der Unterrichtsreihe zur Allgemeinen Relativitätstheorie dar. Aus diesem Grunde verzichte ich an dieser Stelle auf die Darstellung experimenteller Befunde und den mit der Allgemeinen Relativitätstheorie im Zusammenhang stehenden Phänomenen der Astrophysik. (Gravitationslinseneffekt, Schwarze Löcher, Kosmologie). Die Betrachtung dieser Phänomene erlaubt eine Anwendung von an dieser Stelle bereits erworbenem Wissen und ermöglicht so eine aktive Einbeziehung der Lernenden in den Unterrichtsgegenstand. Interessante Ideen für eine unterrichtsgerechte Aufarbeitung dieser Themen finden sich in [2], [5], [6] und [8].

Die positive Resonanz der Schüler auf den Kurs „Allgemeine Relativitätstheorie“, auch im Hinblick auf deren Engagement und die gezeigten Leistungen bestätigen mich in der Auffassung, dass die Allgemeine Relativitätstheorie durchaus in der Schule lehrbar ist. Anhand von Gedankenexperimenten, den Aussagen des Äquivalenzprinzips und der Auswahl geeigneter Modelle (insbesondere für die Behandlung der Kosmologie) ist es möglich, auftretende Größenordnungen von allgemein-relativistischen Effekten vorherzusagen. Diese Größenordnungen konnten - sogar noch leichter als in der Speziellen Relativitätstheorie - mit nur geringem mathematischem Aufwand und mit Hilfe anschaulicher Überlegungen ermittelt werden. Die Reduktion der Betrachtungen auf das Feststellen von Größenordnungen ist dabei nicht einmal als Nachteil der beschriebenen Vorgehensweise anzusehen. Eine Vorstellung der Schüler über diese Größenordnungen ist für das Gesamtverständnis der durch die Allgemeine Relativitätstheorie vorhergesagten und im Nachhinein bestätigten Effekte ja wesentlich wichtiger als ein umständliches Ausrechnen von Vorfaktoren!

Die im Anfangskapitel getätigten Ausführungen im Zusammenhang mit den dargelegten Unterrichtsinhalten und den positiven Ergebnissen belegen, dass die Aufnahme von Lehrzielen und Lehrinhalten zur Allgemeinen Relativitätstheorie in die Lehrpläne der Bundesländer durchaus Sinn machen würde.

## 8 Literaturverzeichnis

- [1] BERRY, M.: *Kosmologie und Gravitation*.  
B.G. Teubner Stuttgart, (1990) S.52
- [2] BOORGEST, U. & K.J. SCHRAMM: *Bilder von Gravitationslinsen. Der bisherige Stand der Beobachtungen*.  
In: *Sterne und Weltraum* (34), (1995) Heft 1, S.24-31
- [3] EINSTEIN, A.: *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*.  
Vieweg Verlag Stuttgart, (1920) S. 45
- [4] LOTZE, K.H.: *Der Lebensweg der Schwarzen Löcher*.  
In: *Die Sterne* (56) (1980) Heft 2, S.82 - 92.
- [5] LOTZE, K.H.: *Kosmologie im Unterricht*.  
In: *Astronomie und Raumfahrt* (34) (1997) Heft 2, S. 18-21.
- [6] LOTZE, K.H.: *Weltmodell der Newton'schen Kosmologie*.  
In: *Astronomie und Raumfahrt im Unterricht* (35) (1998) Heft 6, S.17 - 20.
- [7] MELCHER, H.: *Relativitätstheorie in elementarer Darstellung mit Aufgaben und Lösungen*.  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1976)S. 204 – 207.
- [8] SEXL, R. & H. SEXL: *Weißer Zwerge-Schwarze Löcher. Einführung in die relativistische Astrophysik*.  
Vieweg Verlag Braunschweig, Wiesbaden (1979)