

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

# BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

## Wege in der Physikdidaktik

Band 3

Rückblick und Perspektive

ISBN 3 - 7896 - 0513 - 1

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1993

### Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.  
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle  
genutzt werden. Auf der Homepage

[www.solstice.de](http://www.solstice.de)

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

## Untersuchung der Klarinette und der Flöte im Hinblick auf chaotisches Verhalten \*)

### 1. Einleitung

Musikinstrumente stellen eine reizvolle Herausforderung dar, die Entstehung eines Tons oder Klangs auch physikalisch zu deuten. Sie repräsentieren damit einen idealen Berührungspunkt zwischen Physik und Musik. Im Rahmen des vielerorts geforderten fächerübergreifenden Unterrichts könnte man, ausgehend von diesem Berührungspunkt, vielen interessanten Fragestellungen aus dem Physik- und Musikunterricht nachgehen. Dieses Anliegen wird neuerdings dadurch gefördert, daß preiswerte Sound Sampler und Computer zur Verfügung stehen, mit denen Töne digital aufgezeichnet, bearbeitet und analysiert werden können. Man kann mit diesen Geräten die Tonerzeugung bei Musikinstrumenten wesentlich genauer untersuchen als es mit den bisher in der Schule üblichen Verfahren möglich ist.

Dies war der Anlaß, uns auf elementarem Niveau mit der Tonerzeugung bei einigen Musikinstrumenten auseinanderzusetzen und sie mit den modernen Aufzeichnungs- und Auswerteverfahren zu untersuchen. Insbesondere stand die Frage nach dem Auftreten von nichtlinearen Prozessen bei der Tonerzeugung im Vordergrund. Als Beispiel wurde die Klarinette gewählt, bei der die prinzipielle Funktionsweise eines Holzblasinstruments relativ einfach erläutert werden kann.

Um das neue Nachweis- und Auswerteverfahren zu testen und um einen ersten Überblick über die Bedingungen für das Auftreten von chaotischen Schwingungen bei klarinettenähnlichen Systemen zu erhalten, wurde die Tonerzeugung zunächst an einem der Klarinette nachgebildeten elektronischen Modell genauer untersucht.

### 2. Funktionsweise der Klarinette

Die für die Funktion einer Klarinette wichtigen Bestandteile sind in Abb. 1 dargestellt. Es sind dies der Klangkörper mit den Grifflöchern und Klappen und das Mundstück mit dem Rohrblatt. Beim Spielen werden die Schwingungen im Resonanzkörper folgendermaßen angeregt: Gesteuert durch das Rohrblatt gelangt periodisch Luft in den Resonator (Klangkörper) und regt Eigenschwingungen an, deren Frequenz (Tonhöhe) jeweils durch die effektive Resonatorlänge  $L$  bestimmt wird.  $L$  ist im wesentlichen der Abstand zwischen Mundstück und dem ersten geöffneten Loch.

Der Klangkörper der Klarinette kann durch einen einseitig geschlossenen Zylinder angenähert werden, so daß folgende Resonanzfrequenzen  $f_n$  auftreten können [1]:

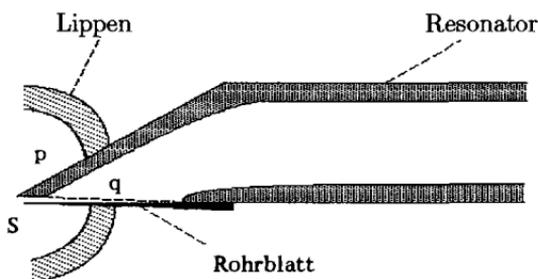
$$f_n = (2n+1) \cdot c/4L \quad (1)$$

( $c$ : Schallgeschwindigkeit;  $L$ : effektive Resonatorlänge;  $n \in \mathbb{N}_0$ ).

Die Tonhöhe wird von der Grundfrequenz  $f_0$  bestimmt; der charakteristische Klarinetten-

klänge tritt auf, weil im wesentlichen nur ungeradzahlig Vielfache von  $f_0$  angeregt werden. Allerdings können unter bestimmten Anregungsbedingungen [2], zusätzlich z.B. auch geradzahlig Vielfache von  $f_0$  auftreten (siehe z.B. Abb. 5 und weiterführende Literatur in [11], [12]).

Die Anregung der Töne wird wesentlich durch die Wirkungsweise des Rohrblatts (dünnes Schilfplättchen von etwa 1cm x 5cm) bestimmt. Das Rohrblatt wird so am Mundstück der Klarinette befestigt, daß sein freies Ende das Mundstück zunächst bis auf einen schmalen Spalt verschließt. Das freie Ende ist relativ dünn, so daß es auf die Kräfte, die durch Druckschwankungen im Mundstück entstehen, entsprechend reagieren kann und praktisch wie ein Ventil wirkt, das sich periodisch öffnet und schließt. Die Anregung der Rohrblattschwingungen kann man sich folgendermaßen vorstellen [2],[3]:



**Abb. 1:** Schematische Darstellung des Mundstücks einer Klarinette. p: Anblasdruck; q: Druck im Innern der Klarinette am Rohrblatt; S: Spaltöffnung. Die Position des Rohrblatts bei geschlossener Spaltöffnung ist durch die gestrichelte Linie angedeutet.

Beim Anblasen des Instruments strömt Luft durch den Spalt in den Resonator. Der dadurch im Resonator erzeugte Überdruck wandert zum offenen Ende und wird dort als Unterdruck reflektiert. Am Rohrblatt bewirkt dann der Unterdruck das Schließen des Luftkanals im Mundstück. Nach der Reflexion am Mundstück (geschlossenes Ende) kommt er nach einer halben Periode als Überdruck zurück und bewirkt die Öffnung des Luftkanals, so daß wieder Luft einströmen kann. Das Mundstück verhält sich jedoch weiterhin wie ein geschlossenes Ende, da die freigegebene Öffnung nur eine kleine Störung darstellt. Die Abfolge von Reflexionen am Mundstück und am offenen Ende setzt sich entsprechend fort, was zu einem periodischen Öffnen und Schließen des Luftkanals führt. Das Rohrblatt wird dabei durch die im Resonator hin- und herlaufende Druckwelle so gesteuert, daß phasenrichtig Luftstöße in den Resonator gelangen und die durch Abstrahlung und Reibung bedingten Verluste ausgleichen. Es entsteht somit ein Ton von konstanter Lautstärke. Das Oberwellenspektrum des Tons wird durch den zeitlichen Verlauf der Luftstöße beeinflusst, der wesentlich durch die elastischen Eigenschaften des Rohrblatts bestimmt wird.

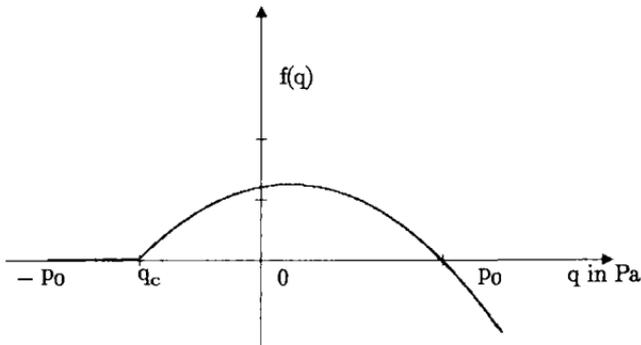
Zur Beschreibung der Funktion des Rohrblatts wird neben dem Anblasdruck p im Mund,

der Druck  $q$  (direkt am Rohrblatt) im Resonator und der "Luftfluß"  $f$  (kurz Fluß) benötigt. Der Fluß ergibt sich aus dem Luftvolumen, das pro Zeiteinheit vom Mund des Spielers in das Instrument geblasen wird (Abb. 1). Der Fluß ist positiv bzw. negativ definiert, wenn er durch den Spalt hinein- bzw. herausströmt. Die Druckangaben erfolgen, wie in der Akustik üblich, relativ zum äußeren Luftdruck, so daß ein Überdruck durch ein positives und ein Unterdruck durch ein negatives Vorzeichen gekennzeichnet wird.

Zur Aufstellung des Zusammenhangs zwischen  $p$ ,  $q$  und  $f$  trifft man folgende Vereinbarungen: Man nimmt zunächst an, daß ein Ton mit konstanter Lautstärke angeregt wird, was einem konstanten Anblasdruck  $p = p_0$  entspricht. Nach [4] ist  $p_0 = 3\text{Pa}$  ein typischer Wert für eine Klarinette. Aus Experimenten folgt, daß das Rohrblatt bei einer charakteristischen Druckdifferenz  $p_0 - q_c = 5\text{Pa}$ , d.h.  $q_c = -2\text{Pa}$ , die Spaltöffnung schließt. Weiterhin kann in guter Näherung angenommen werden, daß die Trägheit des Rohrblatts und die Trägheit der strömenden Luft vernachlässigbar sind. Damit hängt insgesamt der Fluß  $f$  nur noch von der Druckdifferenz  $(p_0 - q)$  ab. Diese Funktion wurde experimentell bestimmt [1]. Ihr Verlauf kann näherungsweise durch folgende Gleichung angepaßt werden [4]:

$$f(q) = \begin{cases} k \cdot (p_0 - q) \cdot (q - q_c) & \text{für } q > q_c ; \quad k = 0,2 \text{ s}^3/\text{kg}^3 \\ 0 & \text{für } q \leq q_c \end{cases} \quad (2)$$

(siehe Abb. 2). Charakteristisch ist, daß der Fluß  $f$  mit abnehmendem  $q$  - ausgehend von  $p_0$  - zunächst in erster Näherung linear anwächst, einem Maximalwert zustrebt und dann in erster Näherung linear bis  $q = -q_c$  auf den Wert  $f = 0$  abnimmt. Für noch kleinere  $q$ -Werte bleibt der Spalt geschlossen, d.h.  $f = 0$ . Falls  $q > p_0$  ist, könnte Luft aus dem Resonator in den Mund gelangen. Der sich dann sofort in der Mundhöhle aufbauende Gegen- druck beendet sofort diesen Fluß. Für  $q$  sind damit praktisch nur Werte im Bereich:  
 -  $p_0 \leq q \leq p_0$  möglich.



**Abb. 2:** Luftfluß  $f$  durch die Spaltöffnung als Funktion des Drucks  $q$  im Inneren der Klarinette;  $q_c = -2\text{Pa}$ ;  $p_0 = 3\text{Pa}$ .

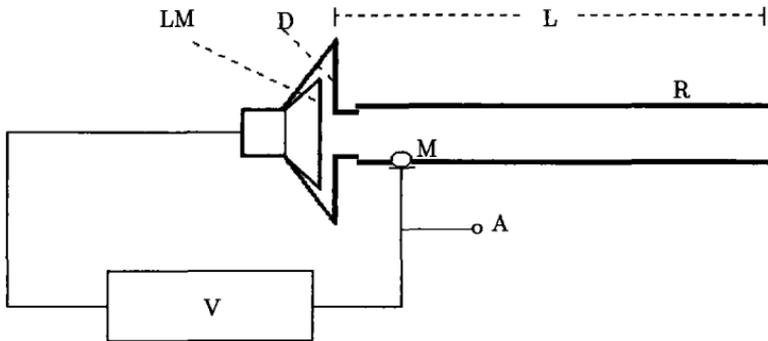
Der Verlauf der Kurve kann qualitativ folgendermaßen gedeutet werden: Für kleine Druck-

differenzen, d.h.  $p_0 \approx q$ , ändert sich die Spaltöffnung kaum, so daß sich der annähernd lineare Verlauf ergibt. Nimmt  $q$  weiter ab, so wird die auf das Rohrblatt ausgeübte resultierende Kraft immer größer, was zu einer Verkleinerung der Spaltöffnung führt und die Abbiegung der Kurve bewirkt. Bei kleiner werdender Spaltöffnung wird die Strömungsgeschwindigkeit im Luftkanal so groß, daß zusätzlich Bernoullikräfte wirksam werden, durch die das Schließen der Spaltöffnung unterstützt wird. Für  $q \leq -q_c$  ist die Kraft auf das Rohrblatt so groß, daß die Spaltöffnung geschlossen bleibt.

Ist eine Resonanzschwingung angeregt, so treten periodische Druckschwankungen am Rohrblatt auf, die jedoch nicht zu einer proportionalen Auslenkung des Rohrblatts führen. Das Rohrblatt reagiert in der in Abbildung 2 angegebenen nichtlinearen Weise und steuert entsprechend den zeitlichen Verlauf der in den Resonator gelangenden Luftstöße.

### 3. Elektronisches Modell

Die Tonerzeugung bei der Klarinette wird wesentlich durch das nichtlineare Verhalten des Rohrblatts und durch die Rückwirkung der Resonatorschwingungen auf das Rohrblatt bestimmt. Ein entsprechendes Modell [5], durch das diese Eigenschaft auf elektronischem Weg nachgebildet werden kann, ist in Abb. 3 und 4 angegeben.

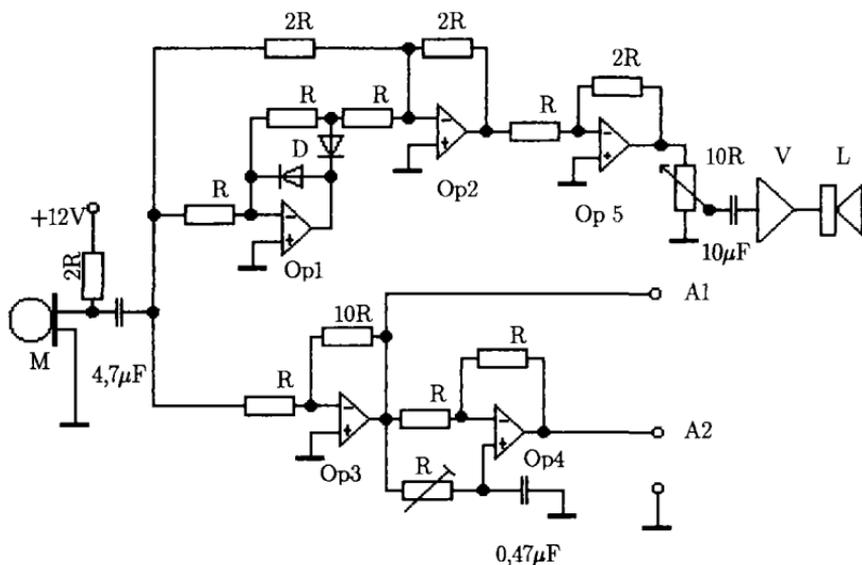


**Abb. 3:** Schematische Darstellung des elektronischen Modells der Klarinette. D: Druckkammer; LM: Lautsprechermembran; R: Resonator; L: effektive Resonatorlänge; M: Mikrophon; A: Monitorausgang; V: nichtlinearer Verstärker.

Als Resonator dient ein Metallrohr (z.B. Länge: 28cm,  $\varnothing = 1,4\text{cm}$ ). Das "Anblasen" wird durch einen Druckkammerlautsprecher simuliert, der an der einen Seite des Rohrs lose angekoppelt ist. Die Rückkopplung erfolgt über ein dicht hinter dem Lautsprecher in eine Bohrung eingesetztes Elektretmikrophon, dessen Signal nichtlinear verstärkt wird und dem Lautsprecher über einen Leistungsverstärker zugeführt wird.

Als geeignete Schaltung zur elektronischen Nachbildung des nichtlinearen Verhaltens des Rohrblatts hat sich der im oberen Teil der Abbildung 4 angegebene Präzisionsgleichrichter mit nachfolgendem Signalinverter erwiesen, der im wesentlichen den negativen Betrag der am Eingang liegenden Signalspannung  $U$  bildet. Die negative Betragsfunktion als Übertra-

gungsfunktion des nichtlinearen Verstärkerteils entspricht in erster Näherung der in Abbildung 2 angegebenen Abhängigkeit zwischen dem Fluß  $f$  und dem Druck  $q$  im Resonator. Der Zusammenhang zwischen den elektrischen und den relevanten akustischen Größen berechnet sich folgendermaßen: Eine Druckänderung  $\Delta q$  in der Nähe des Lautsprechers bewirkt bei einem dicht hinter dem Lautsprecher angeordneten Mikrophon eine dazu proportionale Spannungsänderung  $\Delta U_m$ . Diese wird nichtlinear verstärkt und ergibt die Ausgangsspannung  $\Delta U_L$ , die über den Lautsprecher in eine zu  $\Delta U_L$  proportionale Druckänderung  $\Delta q$  umgewandelt wird.



**Abb. 4:** Schaltplan für den nichtlinearen Verstärker.

M: Mikrophon (Elektretmikrophon mit eingebautem Vorverstärker);

L: Lautsprecher (Druckkammerlautsprecher NEVA);

V: linearer Leistungsverstärker (handelsüblicher 10Watt Hi-Fi Baustein);

Op1 und Op2: Präzisionsgleichrichter [6] als nichtlinearer Vorverstärker;

Op3: linearer Vorverstärker mit dem Ausgang A1 für das Mikrofonsignal  $U(t)$

Op4: Phasenschieber [4] mit dem Ausgang A2 für das zeitversetzte Mikrofonsignal  $U(t - \Delta t)$

Op5: Umkehrverstärker zur Bildung der negativen Betragsfunktion (Op: CA 741, D: Diode (kein spezieller Typ erforderlich);  $R = 1k\Omega$ )

Bezeichnet man die entsprechenden Proportionalitätsfaktoren mit  $k_m$  und  $k_L$ , so gelten folgende Beziehungen:

$$\Delta U_m = k_m \Delta q \text{ und } \Delta U_L = k_L \Delta q .$$

Verfolgt man in Abbildung 3 den Weg eines Signals vom Lautsprecher zum Mikrophon, so ergibt sich bei einer beliebigen Druckänderung  $\Delta q$  am Mikrophon folgende vom Lautsprecher erzeugte Druckänderung:

$$\Delta q = \frac{\Delta U_L}{k_L} = \frac{V \cdot g(\Delta U_m)}{k_L} = \frac{V \cdot g(k_m \Delta q)}{k_L} \quad (3)$$

Dabei bezeichnet  $V$  die Verstärkung und  $g(\Delta U_m)$  die Übertragungsfunktion des nichtlinearen Verstärkerteils.

Aus der Druckänderung  $\Delta q$  erhält man die Flußänderung  $\Delta f$ :

$$\Delta f = \frac{\Delta q}{Z} \quad , \quad (4)$$

wobei  $Z$  die akustische Impedanz des Resonators darstellt, die im Fall einer konstanten Querschnittsfläche  $A$  auf den Schallwellenwiderstand  $c \rho$  zurückgeführt werden kann [7]:

$$Z = \frac{c \cdot \rho}{A} \quad (5)$$

( $c$ : Schallgeschwindigkeit,  $\rho$ : Dichte der Luft im Resonator).

Aus den Gleichungen 3 und 4 erhält man:

$$\Delta f = \frac{V \cdot g(k_m \Delta q)}{Z \cdot k_L} \quad (6)$$

Damit ist auch im Modell der Fluß ausschließlich eine Funktion des Drucks  $q$ , wie nach Gleichung 2 für die Klarinette verlangt wird. Durch eine geeignete Wahl des Parameters  $V$  und der Funktion  $g(\Delta U_m)$  kann deshalb mit dem in Abbildung 3 gezeigtem Versuchsaufbau die Tonerzeugung in einem klarinettenähnlichen System simuliert und unter verschiedenen Bedingungen untersucht werden (die Proportionalitätsfaktoren  $k_m$  und  $k_L$  sind durch die Wahl des Mikrofons und des Lautsprechers fest vorgegeben). Die Verstärkung  $V$  wird am Eingang des über einen Kondensator angekoppelten linearen Leistungsverstärkers eingestellt;  $g(\Delta U_m)$  entspricht der negativen Betragsfunktion.

#### 4. Aufzeichnungs- und Auswerteverfahren

Um Informationen über die akustischen Schwingungen des elektronischen Modells bzw. der untersuchten Musikinstrumente zu erhalten, muß der jeweils erzeugte Ton geeignet aufgezeichnet und ausgewertet werden. Zur Frequenzanalyse des Tons mit Hilfe eines Computerprogramms muß die Amplitude des Tons als Funktion der Zeit digital vorliegen. Um dies zu erreichen, verwendeten wir einen sogenannten "Sound Sampler" (Firma Galactic, Essen, Sample Star+, 4- und 8-Bitbetrieb, Abtastrate bis 42kHz, passend zum verwendeten Atari St 1040 Computer; entsprechende Karten und Software gibt es mittlerweile auch für MS-DOS-Rechner), der das Mikrofonsignal über einen Analog-Digital-Wandler in entsprechende Zahlenwerte umwandelt. Mit Hilfe des Computers werden die Werte gespeichert und können so weiterverarbeitet werden. Für unsere Betrachtungen genügte eine Abtastrate von ca. 20kHz. Die maximale Aufzeichnungsdauer bei dieser Abtastrate und einem Speicher von 1Mbyte (Atari St 1040) beträgt ca. 50s. Es zeigte sich, daß bereits Aufzeichnungs-

dauern von ca. 0,5s ausreichen, um die notwendigen Informationen zu erhalten. Die jeweiligen Speicherinhalte wurden auf Diskette abgespeichert und standen für die weitere Auswertung zur Verfügung.

Als geeignete Methoden für die Untersuchung des Schwingungsverhaltens nichtlinearer dynamischer Systeme erwiesen sich die Zustandsraumdarstellung und die Frequenzanalyse.

#### 4.1. Zustandsraumdarstellung

Es ist sehr umständlich - vor allem bei nichtperiodischen Signalen - aus der Aufzeichnung der Amplitude eines Tons als Funktion der Zeit das Zeitverhalten der Amplitude zu analysieren (siehe Abb. 5a). Es wäre günstiger, eine Darstellung zu wählen, bei der die Zeit nur als Parameter auftritt.

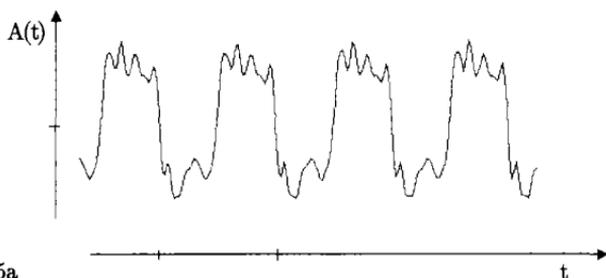


Abb. 5a

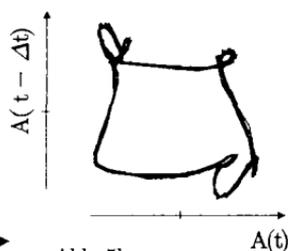


Abb. 5b

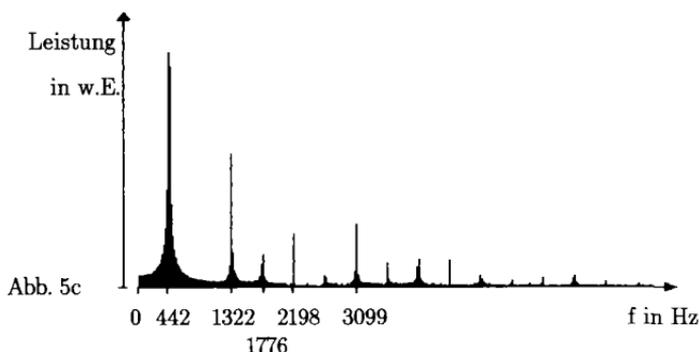


Abb. 5c

**Abb. 5:** Darstellungsmöglichkeiten für einen aufgezeichneten Ton am Beispiel des auf der Klarinette gespielten Kammertons a' (440Hz).

**Abb. 5a:** Darstellung der Amplitude als Funktion der Zeit (mit dem Sound Sampler aufgezeichnet).

**Abb. 5b:** Zustandsraumdarstellung (für  $\Delta t \approx 2 \cdot 10^{-4}$ s).

**Abb. 5c:** Frequenzspektrum. (Die gemessene Frequenz  $f=442$ Hz stimmt gut mit der international auf 440Hz festgesetzten Frequenz des Kammertons a' überein. Wie nach Gleichung 1 zu erwarten ist, bestimmen die ungeradzahligen Vielfachen von 440Hz das Frequenzspektrum).

Die einfachste Form einer solchen Darstellung erhält man durch die Auftragung des Am-

plitudensignals  $A(t)$  gegen sich selbst. Das zeitliche Verhalten der aufgezeichneten Amplituden wird dann durch eine Punktfolge auf der Winkelhalbierenden charakterisiert. Die Nachteile, die sich dadurch ergeben, daß alle aufgetragenen Punkte auf der Winkelhalbierenden liegen, lassen sich dadurch umgehen, daß man  $A(t)$  gegen das um ein beliebiges Zeitintervall  $\Delta t$  verzögerte Amplitudensignal  $A(t - \Delta t)$  aufträgt. In diesem Fall erhält man in der  $(A(t), A(t - \Delta t))$ -Ebene eine Kurve, aus der man das zeitliche Verhalten erkennen kann. Bei einem periodischen Amplitudensignal ist dies eine geschlossene Kurve (siehe Abb. 5b). Für chaotisches Verhalten, d.h. einem nichtperiodischen Signal, ergibt sich eine nichtgeschlossene Kurve, die einzelne Flächenbereiche voll ausfüllt.

Handelt es sich um einen sinusförmigen Ton der Periodendauer  $T$  und ist  $\Delta t = T/4$ , so stellt  $A(t - \Delta t)$  die Ableitung des Tonsignals dar. Man erhält dann eine Auftragung, die der meist geläufigeren Phasenraumdarstellung entspricht. Die Auftragung eines Signals gegen seinen zeitverzögerten Wert nennt man Zustandsraumdiagramm (z.B. in [8]). Zustandsraum- und Phasenraumdarstellung sind topologisch äquivalent (siehe [8]). Der Einfachheit wegen wählten wir die Zustandsraumdarstellung. Das dazu notwendige zeitverzögerte Signal wird für die Echtzeitdarstellung auf dem Oszilloskop (xy-Betrieb) über den bereits erwähnten Phasenschieber (s. Abb. 4) erzeugt. Als Zeitverzögerung  $\Delta t$  hat sich ein Wert von ca.  $10^{-4}$ s (ca. 10% der Schwingungsdauer der stärksten Komponente im Spektrum) als besonders geeignet erwiesen.

## 4.2. Frequenzanalyse

Aus der Zustandsraumdarstellung des Amplitudensignals können zwar Rückschlüsse auf die dynamische Entwicklung gezogen werden, jedoch nicht auf die Tonhöhe bzw. die Klangfarbe. Deshalb wird als weitere Untersuchungsmethode die Frequenzanalyse angewendet.

Das Frequenzspektrum des aufgezeichneten Tons wird mit Hilfe der schnellen Fourier-Analyse berechnet [9]. Bei der gewählten Abtastrate von etwa 20kHz beträgt der zeitliche Abstand zwischen zwei Meßpunkten  $\Delta t \approx 5 \cdot 10^{-5}$ s. Nach dem Abtasttheorem müssen zur Rekonstruktion eines sinusförmigen Signals mindestens zwei Meßpunkte pro Periode vorliegen. Das berechnete Frequenzspektrum ist daher auf den Bereich bis 10kHz beschränkt (Beispiel siehe Abb. 5c). Mit der gewählten Frequenzanalyse kann die Frequenzbestimmung mit einer Genauigkeit von mindestens 10Hz durchgeführt werden.

## 5. Untersuchung der mit dem elektronischen Modell erzeugten Töne

Zur Untersuchung der von dem elektronischen Modell erzeugten Schwingungen wird die Frequenzanalyse und die Zustandsraumdarstellung herangezogen. Zur Voruntersuchung der Töne wird jeweils die Zustandsraumdarstellung auf dem Oszilloskop eingesetzt. Bei einer Änderung der Kurvenformen, die auf nichtlineares Verhalten hindeuten, wird der zeitliche Amplitudenverlauf mit Hilfe des Sound Samplers aufgezeichnet und damit einer weiteren Untersuchung zugänglich.

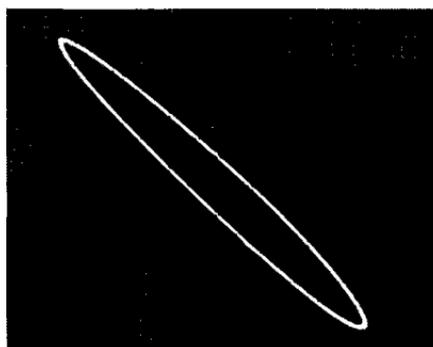


Abb. 6a

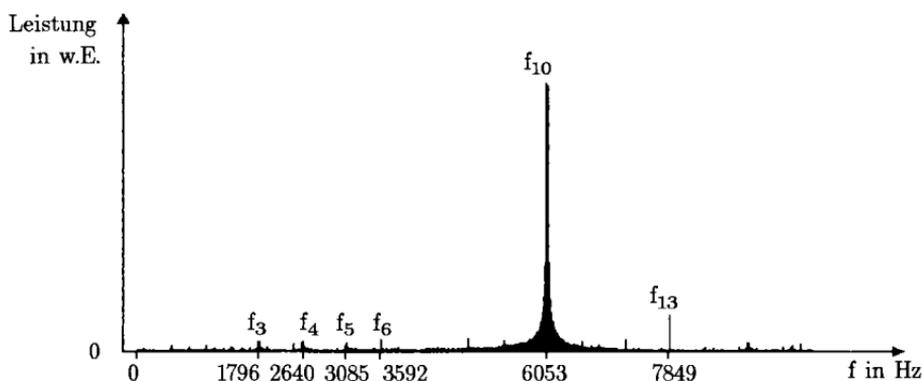


Abb. 6b

**Abb. 6a:** Zustandsraumdarstellung in Echtzeit bei 28-facher Verstärkung (elektronisches Modell).

**Abb. 6b:** Frequenzspektrum des Signals in Abb. 6a.

Die Tonhöhe wird von  $f_{10} = 6053\text{Hz}$  bestimmt. Alle wesentlichen Frequenzen können innerhalb des Fehlers als Resonanzfrequenzen gemäß Gleichung 8 identifiziert werden.

Wir erhielten zum Beispiel in Abhängigkeit von der Verstärkung  $V$  folgende Ergebnisse: für kleine Werte von  $V$  ergibt sich ein Ton der Frequenz  $f_{10} = 6053\text{Hz}$  (s. Abb. 6b). Vergrößert man langsam die Verstärkung, so beobachtet man ein plötzliches Auftreten von Tönen mit Frequenzen kleiner als  $f_{10}$  (s. Abb. 7b). In der Zustandsraumdarstellung auf dem Oszilloskop führt dies dazu, daß sich mehrfach geschlossene Kurven ergeben, wie z.B. die in Abbildung 7a gezeigte Kurve, die einen ausgezeichneten Punkt zweimal umschließt. Die Periodendauer der Grundschwingung hat sich dabei insgesamt verdoppelt. Eine Periodenverdopplung bzw. allgemeiner eine Periodenvervielfachung stellt bei nichtlinearen Systemen eine typische Vorstufe chaotischen Verhaltens dar [10]. Mit wachsender Verstärkung

nimmt die Amplitude der Frequenz  $f_{10}$  soweit ab, bis sie im Bereich großer Verstärkungen im Rauschen nicht mehr wahrgenommen werden kann. Das Spektrum zeigt in diesem Fall ein relativ gleichmäßiges Frequenzband (s. Abb. 8b) und in der Zustandsraumdarstellung tritt eine flächendeckende Kurve (s. Abb. 8a) auf.

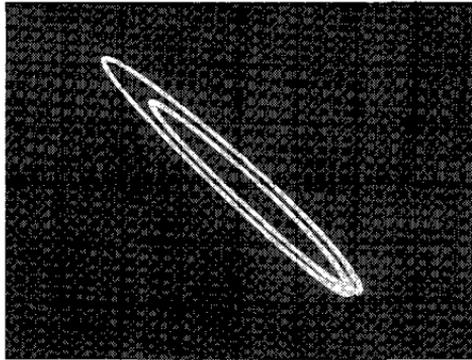


Abb. 7a

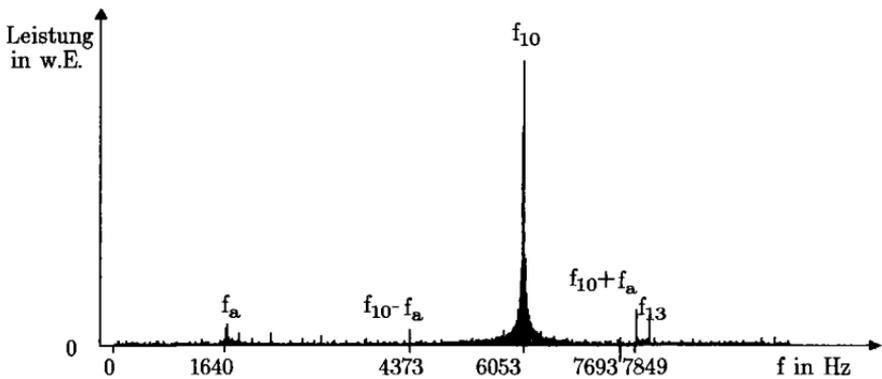


Abb. 7b

**Abb. 7a:** Zustandsraumdarstellung in Echtzeit bei 37-facher Verstärkung (elektronisches Modell).

**Abb. 7b:** Frequenzspektrum des Signals in Abb. 7a.

Als erstes Anzeichen von chaotischem Verhalten tritt die Frequenz  $f_a=1640\text{Hz}$  auf, die keine Resonanzfrequenz ist und eine Kombination aus  $f_{10}$  und  $f_a$  ist.

Bei dem elektronischen Modell bestimmt  $f_{10}$  den Ton bei niedriger Verstärkung (s. Abb. 6 - 8). Dieser Ton kann als Oberton für den beidseitig offenen Resonator des Modells mit den Resonanzfrequenzen [1] identifiziert werden:

$$f_n = 2 \cdot n \cdot \frac{c}{4L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Für  $n = 10$ ,  $c = 340\text{m/s}$  und  $L = 0,28\text{m}$  ist die erwartete Frequenz  $f_{10} = 6071\text{Hz}$ . Sie stimmt mit dem durch die Frequenzanalyse erhaltenen Wert von  $6053\text{Hz}$  innerhalb der Genauigkeit für die Bestimmung der effektiven Resonatorlänge  $L$ , für die Angabe der Ausbrei-

tungsgeschwindigkeit  $c$  und für die Genauigkeit des Frequenzanalyseverfahrens gut überein. Auch alle anderen Frequenzen, die bei niedriger Verstärkung zum Ton beitragen, können als Resonanzfrequenzen gemäß Gleichung 8 bestimmt werden. Die Bevorzugung des 10ten Obertons gegenüber dem Grundton ist auf den Frequenzgang des verwendeten Lautsprechers zurückzuführen, der bei etwa 6100Hz ein ausgeprägtes Maximum aufweist.



Abb. 8a

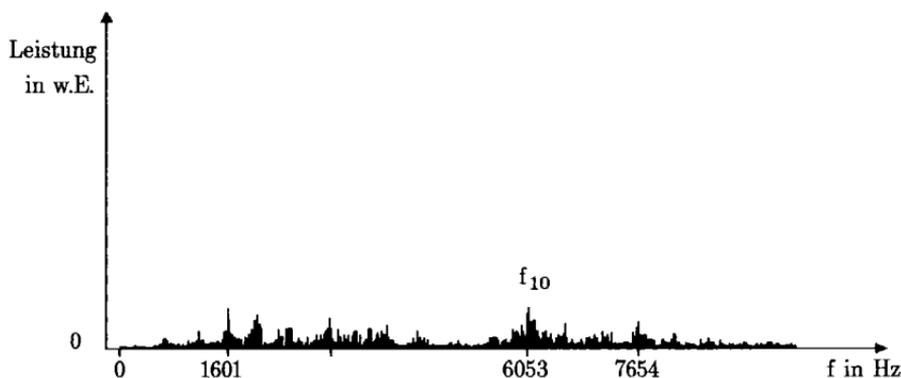


Abb. 8b

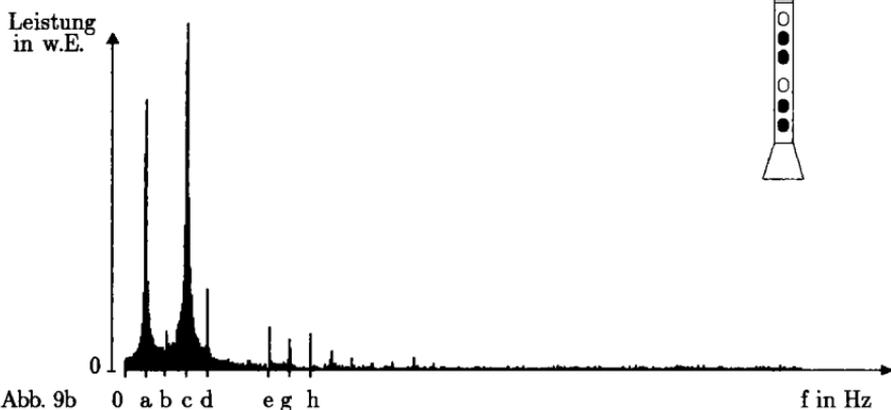
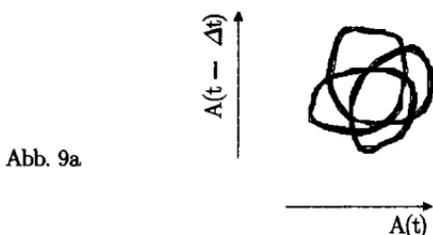
**Abb. 8a:** Zustandsraumdarstellung in Echtzeit bei 83-facher Verstärkung (elektronisches Modell).

**Abb. 8b:** Frequenzspektrum des Signals in Abb. 8a. Es tritt ein annähernd gleichmäßiges Frequenzband auf.

Die Ergebnisse zeigen, daß im elektronischen Modell das Auftreten von chaotischen Schwingungen von der gewählten Verstärkung abhängt. Bei der Suche nach den Anblasbedingungen, die bei einer realen Klarinette zu chaotischen Schwingungen führen könnten, sollte somit vor allem die Spaltbreite zwischen Rohrblatt und Mundstück, die der Verstärkung im Modell entspricht, gezielt verändert werden.

## 6. Untersuchungen an einer realen Klarinette

Die Aufzeichnung und Analyse der Töne der realen Klarinette erfolgt wie im Fall des elektronischen Modells. Zum Spiel auf der Klarinette konnten wir einen erfahrenen Klarinettenspieler gewinnen. Bei der Suche nach nichtlinearem Verhalten erweist sich die Zustandsraumdarstellung auf dem Oszillographen als besonders hilfreich, da man sofort eine Rückmeldung über die Art der erzeugten Schwingung hat. Der Spieler kann dann gezielt versuchen, seine Spielweise so anzupassen, daß gegebenenfalls Vorstufen zu chaotischem Verhalten oder chaotisches Verhalten auftreten.



**Abb. 9:** Multiphoner Klarinettenenton

**Abb. 9a:** Zustandsraumdarstellung - dreifach geschlossene Kurve ( $\Delta t \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{s}$ )

**Abb. 9b:** Frequenzspektrum mit den Frequenzen:

$$\text{a: } f_1 = 330 \text{ Hz; b: } f_2 - f_1 = 619 \text{ Hz; c: } f_2 = 950 \text{ Hz; d: } f_1 + f_2 = 1280 \text{ Hz;}$$

$$\text{e: } f_1 + 2f_2 = 2231 \text{ Hz; g: } 2f_1 + 2f_2 = 2561 \text{ Hz; h: } 3f_1 + 2f_2 = 2892 \text{ Hz}$$

Gemäß den Erkenntnissen aus dem elektronischen Modell wurde versucht, durch Variation der Spaltbreite am Mundstück die Bedingungen für nichtlineares Verhalten zu "optimieren". Wir erhielten dabei das zunächst "enttäuschende" Ergebnis, daß weder Vorstufen zum Chaos noch Chaos selbst auftraten. Offenbar kann bei der realen Klarinette die "Verstär-

kung", für die beim elektronischen Modell Periodenvervielfachungen auftreten, nicht erreicht werden. Vermutlich wäre eine so große Spaltöffnung erforderlich, daß kein Ton mehr erzeugt werden kann.

Unser Spieler konnte jedoch durch eine passende Kombination aus Griffweise, Anpreßdruck der Lippen auf das Rohrblatt und Anblasdruck Töne erzeugen, die auf dem Oszilloskop als Vorstufen zu chaotischen Schwingungen (Bifurkationen) interpretiert werden konnten. Bei genauem Zuhören lassen sich bei diesen Tönen unterschiedliche Frequenzbestandteile hören. Dies sollte bei einem "reinen" Ton, der definitionsgemäß nur aus Grundton und Obertönen besteht, nicht der Fall sein, da diese Obertöne nicht als getrennte Frequenzen wahrgenommen werden können. Daraus leitet sich auch die Bezeichnung multiphoner Töne [1] bzw. Kombinationstöne [11], [12] ab.

Einige dieser Töne wurden mit dem Sound Sampler aufgezeichnet und weiter untersucht. Als typisches Beispiel wird in Abbildung 9 die Zustandsraumdarstellung und das Spektrum eines multiphonen Tons gezeigt. Die zugehörige Griffweise ist zusätzlich in Form einer schematischen Darstellung der Klarinette angegeben (dunkel gekennzeichnete Grifflöcher und das Daumenloch sind geschlossen).

Im Zustandsraumdiagramm (s. Abb. 9a) erkennt man eine dreifach geschlossene Kurve, die auf eine Periodenverdreifachung hinweist. Das Spektrum des Tons (s. Abb. 9b) zeigt Frequenzen, die keine ganzzahligen Vielfachen voneinander sind. Es lassen sich jedoch zwei Frequenzen finden, aus denen sich durch ganzzahlige Kombinationen alle wesentlichen Frequenzen des beobachteten Spektrums ableiten lassen. Dabei ist die Übereinstimmung der ganzzahligen Kombinationen mit den tatsächlich im Spektrum auftretenden Frequenzen bis auf  $\pm 2\text{Hz}$  genau.

Das Auftreten von multiphonen Tönen bzw. Kombinationstönen ist ein direkter Hinweis auf die Wirkung nichtlinearer Elemente bei der Tonerzeugung, wie schon Helmholtz [12] beschrieben hat. Durch die Nichtlinearität kann es zur Kopplung z.B. von zwei Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  kommen, so daß sich eine Schwingung mit der Frequenz  $f_k$  ergibt, die sich nach [11], [12] gemäß

$$f_k = m f_1 \pm n f_2 \quad \text{für } m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

zusammensetzt. Damit wird verständlich, daß im Spektrum der Klarinette auch geradzahlig Vielfache der Grundfrequenz (s. Abb. 5) angeregt werden können. Die Stärke der einzelnen Kombinationsschwingungen hängt im wesentlichen davon ab, ob sie in der Nähe einer Eigenfrequenz des Systems liegen.

Wie insbesondere die Zustandsraumdarstellungen des multiphonen Tons mit der dreifach geschlossenen Kurve zeigt, stellt dieser Ton eine Vorstufe zu chaotischem Verhalten dar. Bei multiphonen Tönen muß Anblasdruck und Lippenanpreßdruck auf das Rohrblatt empfindlich abgestimmt sein, so daß wir nicht feststellen konnten, ob nur einer dieser Parameter für die Bifurkation verantwortlich ist.

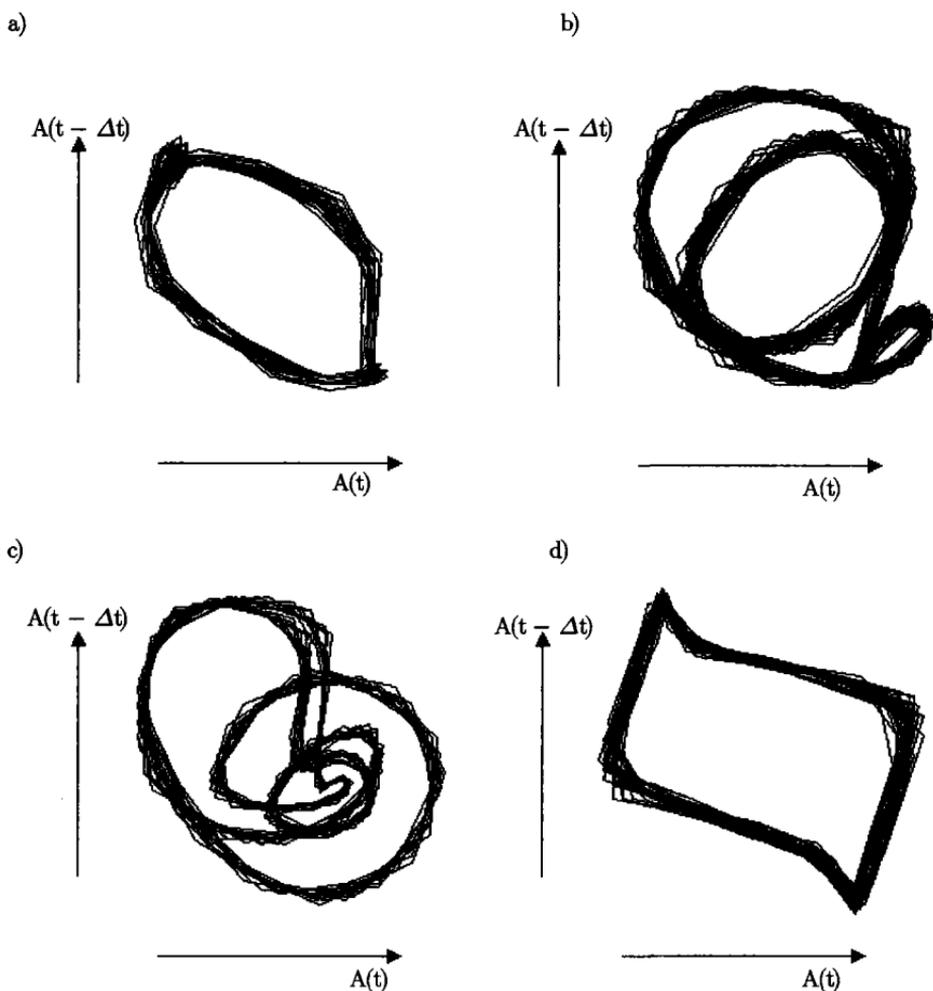


Abb. 10 a -d

**Abb. 10:** Zustandsraumdiagramme für die mit der Blockflöte erzeugten, charakteristischen Töne bei zunehmendem Anblasdruck. Durch Überblasen kann vom ersten Oberton  $c'$  (Abb. 10a) der zweite Oberton  $c''$  (Abb. 10d) erreicht werden; für  $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$ .

Abb. 10b und Abb. 10c stellen multiphone Töne im Übergangsbereich dar.

## 7. Untersuchungen an einer Blockflöte

Mit den bei der Klarinette angewandten Methoden lassen sich ohne großen Aufwand beliebige Musikinstrumente untersuchen. Sehr geeignet erschien uns zum Beispiel auch die Blockflöte, da sich bei ihr ohne besondere Techniken die gewünschten Töne spielen lassen. Die Funktionsweise der Blockflöte ähnelt der der Klarinette, jedoch erfolgt hier die Anre-

gung der Resonanzfrequenzen durch einen Luftstrom, der am Mundstück periodisch in den Resonator hinein und heraus gelenkt wird (zur genaueren Beschreibung der Funktionsweise siehe [3]). Am Mundstück ist der Klangkörper der Blockflöte geöffnet, so daß der Resonator einem beidseitig offenen Zylinder entspricht. Als Resonanzfrequenzen ergeben sich deshalb gemäß Gleichung 8 die geradzahigen Vielfachen der Grundfrequenz  $f_0=c/2L$ .

Uns stand bei der Untersuchung eine Sopranflöte zur Verfügung. Als überraschendes Ergebnis erhielten wir, daß bei der Blockflöte bei fast allen Griffen durch Änderung des Anblasdrucks multiphonne Töne erzeugt werden können. Besonders interessant sind die Vorgänge beim sogenannten Überblasen, d.h. im Übergangsbereich zwischen einem Ton und dem nächsten Oberton. Als ein Beispiel wird hierzu der Ton c beim Übergang vom ersten in den zweiten Oberton untersucht.

In Abbildung 10 wird dies anhand charakteristischer Zustandsraumdarstellungen gezeigt. Für den ersten Oberton ergibt sich eine einfach geschlossene Kurve (Abb. 10a). Vergrößert man den Anblasdruck, so ist ein multiphoner Ton zu hören, der im Zustandsraumdiagramm zu einer zweifach geschlossenen Kurve führt (Abb. 10b). Bei einer besseren Anpassung des Anblasdrucks kann man sogar einen multiphonen Ton erzeugen, für den sich eine vierfach geschlossene Kurve ergibt (Abb. 10c). Schließlich liefert die Flöte nur noch den zweiten Oberton mit einer einfach geschlossenen Kurve im Zustandsraum (Abb. 10d).

Beim direkten Hören der Töne, die bei der Zunahme des Anblasdrucks angeregt werden, und durch die Auswertung der zugehörigen Frequenzspektren gewinnt man den Eindruck, daß die multiphonen Töne durch das Konkurrieren unterschiedlicher Frequenzen, die nahe den Resonanzfrequenzen liegen, entstehen. Bei der Flöte, deren Obertöne geradzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind (Gleichung 8), ergeben sich deshalb Periodenverdopplungen (zweifach bzw. vierfach geschlossene Kurven im Zustandsraumdiagramm), bei der Klarinette hingegen, deren Obertöne ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind (Gleichung 1), ergeben sich Periodenverdreifungen (dreifach geschlossene Kurve im Zustandsraumdiagramm).

## 8. Zusammenfassung

Die Untersuchung hat gezeigt, daß die für das elektronische Modell nachgewiesenen chaotischen Schwingungen bei der realen Klarinette nicht auftreten. Auch konnten sie bei einer Blockflöte nicht nachgewiesen werden. Allerdings beobachteten wir bei besonderen Anblasbedingungen charakteristische Vorstufen chaotischen Verhaltens wie Periodenverdreifung bei der Klarinette bzw. Periodenverdopplung bei der Blockflöte.

Es wurde ferner die Registrierung und Analyse von Tönen mit Hilfe eines Sound Samplers und eines Computers beschrieben und die Leistungsfähigkeit dieser Verfahren mit den vom elektronischen Modell erzeugten periodischen und nichtperiodischen Schwingungen nachgewiesen. Das beschriebene Aufzeichnungs- und Auswerteverfahren eignet sich nicht nur zur Untersuchung der von Musikinstrumenten erzeugten Töne im Hinblick auf nichtlineare Prozesse, sondern es kann auch als ein bisher wenig beachtetes Bindeglied zwischen

Physik- und Musikunterricht dienen. Vor allem bietet der Sound Sampler zusammen mit der mitgelieferten Software einen Einblick in die Aufnahme- und Bearbeitungsmethoden der professionellen digitalen Tontechnik, was im Rahmen des fächerübergreifenden Unterrichts von besonderem Interesse sein kann.

\*) Aktualisierte Fassung eines Beitrags gleichen Titels in: Physik u. Didaktik, 1992 (99-113)

## 9. Literatur:

- [1] Benade A. H.: "Fundamentals of Musical Acoustics", Oxford University Press, New York 1976
- [2] Laloë, S. et F.: "La Clarinette". In: Pour la Science, (5) S. 73 - 81 (1985)
- [3] Spektrum der Wissenschaft - Reihe verständliche Wissenschaft: "Die Physik der Musikinstrumente", Heidelberg 1988
- [4] Mc. Intre M. E., Schumacher R. T. und Woodhouse J.: "On the Oscillations of Musical Instruments". In: Journal of the Acoustical Society of America, (74) S. 1325 (1983)
- [5] Maganza C. und Caussé R.: "Bifurcation, Period Doublings and Chaos in Clarinetlike Systems", Europhysics Letters, (1) S. 295 (1986)
- [6] Tietze / Schenk: "Halbleiterschaltungstechnik", Springer Verlag, Heidelberg 1971
- [7] Heidermanns, K.: "Elektroakustik", Teubner Verlag, Stuttgart 1979
- [8] Ruelle D., Bull. Soc. Brasil Math., Vol. 9, S. 331 (1978)
- [9] Schaefer N. und Bertuch M.: "Butterfly-Algorithmus". In: c't (8), S. 44 (1986)
- [10] Thompson M. T. und Steward H. B.: "Nonlinear Dynamics and Chaos", John Wiley & Sons, Chichester (1986)
- [11] Trendelenburg, F.: "Akustik", Springer Verlag, Berlin 1939
- [12] v. Helmholtz, H.: "Die Lehre von den Tonempfindungen" , 6. Auflage, Braunschweig 1913 (Anmerkung: zu Zeit zugänglich ist die relativ preiswerte englische Ausgabe: v. Helmholtz: "On the Sensation of Tone", Dover Publications, New York 1954)