

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 2

Anregungen für Unterricht und Lehre

ISBN 3 - 7896 - 0100 - 4

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1991

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.
Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.
Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage
www.solstice.de
werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

Physik des Schaukelns und parametrische Verstärkung

1. Einleitung

Das Schaukeln erfreut sich bei jung und alt großer Beliebtheit. Es dürfte daher von Interesse sein, die physikalischen Grundlagen des Schaukelns näher zu untersuchen und z.B. der Frage nachzugehen, nach welchen Gesetzen man die Schaukelbewegung einleiten kann, ohne sich vom Boden abzustößen bzw. sich anschubsen zu lassen, oder wie man vorgeht, um die Amplituden der Schaukel im Sitzen oder im Stehen zu vergrößern. Es ist bemerkenswert, daß bei letzterem u.a. ein Vorgang eine Rolle spielt, der als parametrische Verstärkung über einen Frequenzbereich von ca. 10^{14} Hz vielfältige Anwendungen findet. Die parametrische Verstärkung wird beim Schaukeln vor allem in stehender Position (Schiffsschaukel) zur Vergrößerung der Amplituden bis zum Überschlag angewendet.

2. Energiezufuhr durch plötzliche Schwerpunktsverlagerung

Beobachtet man den Fahrgast einer Schiffsschaukel, so erkennt man, daß er zwecks Amplitudenzunahme u.a. jeweils in unmittelbarer Nähe des höchsten Bahnpunktes in die Hocke geht und sich anschließend annähernd im tiefsten Bahnpunkt wieder aufrichtet. Zum leichteren Verständnis des hier auftretenden Verstärkungsmechanismus empfiehlt es sich, die in Wirklichkeit ablaufenden Vorgänge auf ein einfaches Modell zu reduzieren, bei dem die Gesamtmasse des Fahrgastes als eine in seinem Schwerpunkt S vereinigte Punktmasse angesehen wird und die Masse der Schaukelteile, die Lagerreibung und der Luftwiderstand vernachlässigt werden. Ferner soll das Niederhocken und Aufrichten plötzlich vor sich gehen, sodaß die in Abb. 1 gezeigte Bahnkurve ABCDE des Schwerpunkts S entsteht.

Liegt zu Beginn des Vorgangs der Schwerpunkt im Punkt A, so hat S anfangs die Höhe H_1 über dem tiefsten Bahnpunkt B. Nach dem Energiesatz gilt dann für die Geschwindigkeit v_1 von S in B: $v_1 = \sqrt{2gH_1}$. Beim Aufrichten in B verschiebt sich dann S gemäß Voraussetzung in radialer Richtung um die Strecke $BC = h$. Während dieses Anhebens tritt daher kein Drehmoment bezüglich des Aufhängepunktes (Drehpunkt) O der Schaukel (s. Abb. 1, [9]) auf, und der Drehimpuls der Masse m bleibt erhalten (Flächensatz). Folglich gilt:

$$(l + h)v_1 = lv_2 \text{ oder } v_2 = v_1(1 + h/l).$$

Auf Grund der Geschwindigkeit v_2 erreicht der Schwerpunkt S die Höhe H_2 über dem Punkt C, für die gilt:

$$H_2 = v_2^2/2g = v_1^2(1+h/l)^2/2g = H_1(1+h/l)^2 .$$

Daß sich die Schaukelbewegung durch das Anheben von S verstärkt hat, erkennt

man durch den Vergleich der beiden Winkel φ_0 und φ_1 , welche die Gerade SO zu Beginn und am Ende der 1. Halbschwingung mit der Lotrechten OB bildet. Wegen:

$$H_1 = (1+h)(1 - \cos \varphi_0), \quad H_2 = l(1 - \cos \varphi_1) \quad \text{und} \quad 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2(\varphi/2) \quad \text{folgt:}$$

$$\sin^2(\varphi_1/2) = (1+h/l)^3 \sin^2(\varphi_0/2), \quad \text{und damit} \quad \varphi_1 > \varphi_0. \quad (1)$$

Geht der Fahrgast im Punkt D wieder in die Hocke, so verschiebt sich S um die Strecke h von D nach E. Nach seinem Zurückschwingen bis B kann er sich wieder aufrichten und S erneut um h anheben. Beim Weiterschwingen erreicht er dann einen Winkel φ_2 mit $\varphi_2 > \varphi_1$. Durch laufendes Fortsetzen dieses "Pumpvorgangs" entsteht schließlich der Winkel φ_n . Für diesen gilt:

$$\sin(\varphi_n/2) = (1+h/l)^{3n/2} \sin(\varphi_0/2); \quad (2)$$

Zeichnet man die Graphen von:

$$y_1 = \sin(\varphi/2) \quad \text{und von}$$

$$y_2 = (1+h/l)^{1,5} \cdot \sin(\varphi/2), \quad \text{so erhält man gemäß Abb. 2 ein anschauliches Bild der Zunahme der Winkel$$

in den Umkehrpunkten. Für Abb. 2 wurde speziell $h=0,5\text{m}$, $l=2,5\text{m}$, also $(1+h/l)^{1,5} \approx 1,31$ und $\varphi_0 = \pi/6$ gewählt. Die auf φ_0 folgenden Winkelamplituden ergeben sich aus der zwischen den beiden Graphen gezeichneten Treppenkurve. Die φ -Werte der Sprungstellen entsprechen den Winkeln der Umkehrpunkte. Aus Glg. (1) folgt, daß die Zunahme der Amplituden von der Hubhöhe h, die durch die Größe des Fahrgastes bestimmt ist, sowie von der Anfangs-

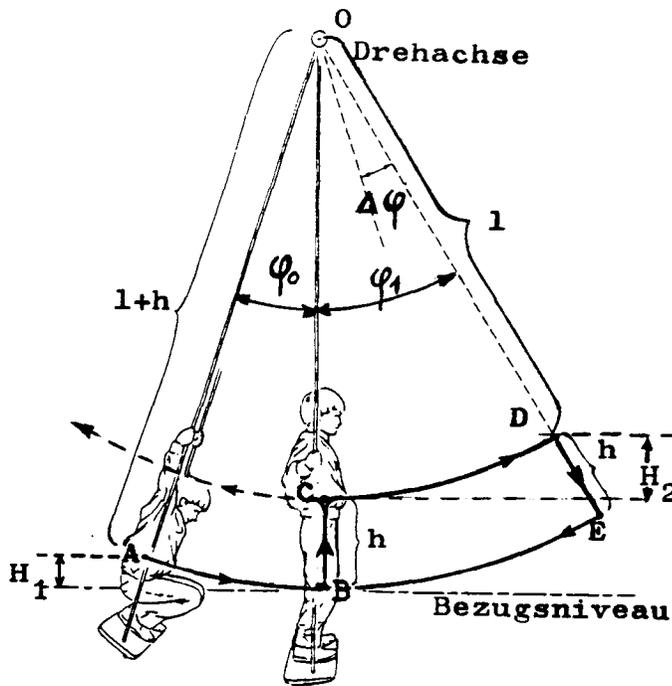


Abb. 1: Schema einer Schaukelanordnung

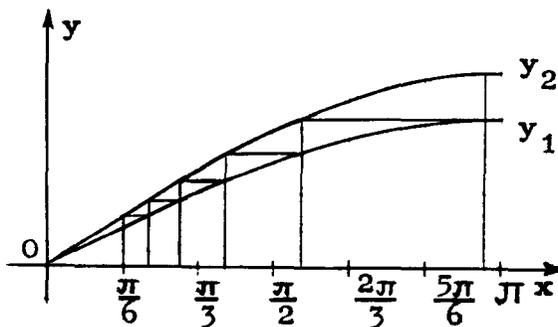


Abb. 2: Graph für y_1 und y_2

amplitude φ_0 und dem Abstand l des Schwerpunktes S von O, also von der Länge der Seile, Ketten oder Streben abhängt, an denen Schaukelbrett oder Gondel befestigt sind. Für den maximal erreichbaren Winkel $\varphi_n = \pi$ gilt:

$$1 = (1 + h/l)^{1,5n} \sin(\varphi_0/2).$$

Mit den obigen Werten h , l und $\varphi_0 = 5^\circ$ ergibt sich $n \approx 11,5$, d.h. man erreicht also bereits nach ca. zwölf "Pumpvorgängen" den Überschlag. Speziell für $\varphi_0 = 0$ ist auch $\varphi_n = 0$, so daß die Schaukel durch Aufrichten und Niederhocken nicht aus der Nulllage heraus in Bewegung versetzt werden kann. Die Größe des erforderlichen Anfangswinkels wird bei Vorliegen einer konstanten Reibungskraft F_R u.a. durch das Ausmaß von F_R bestimmt [1].

Eine tiefgreifendere Erklärung des beschriebenen Verstärkungsvorganges erhält man durch Energiebetrachtungen. Beim Anheben seines Schwerpunktes S muß der Fahrgast Arbeit gegen die Schwerkraft und gegen die Zentrifugalkraft verrichten. Letztere muß in einem rotierenden Bezugssystem zu den anderen wirkenden Kräfte hinzugerechnet werden. Diese Arbeit erhöht die Gesamtenergie. Zum Erzielen einer guten Verstärkung muß die zugeführte Arbeit möglichst groß sein. Letztere wird bei gegebenem h dann am größten, wenn die Summe der zu überwindenden Kräfte einen Höchstwert annimmt und zudem parallel zum Hubweg ist. Dies ist im tiefsten Bahnpunkt B der Fall. Der Fahrgast sollte also möglichst plötzlich aufstehen.

Senkt der Fahrgast seinen Schwerpunkt ab, so wird potentielle Energie entzogen. Dieser Entzug wird ein Minimum, wenn das Absenken in den Umkehrpunkten erfolgt. Hier ist ja lediglich die Schwerkraft wirksam, die an diesen Stellen mit dem Hubweg auch noch den größtmöglichen Winkel einschließt. Der Fahrgast sollte also hier möglichst plötzlich in die Hocke gehen. Würde er sich dagegen in den Umkehrpunkten aufrichten und im Punkt B in die Hocke gehen, so würde sich die Gesamtenergie seiner Masse verringern und die Schaukelbewegung abgebremst werden. Bei dem Hubvorgang im Bahnpunkt B beträgt die Energiezufuhr $E_h = mgh + m(v_2^2 - v_1^2)/2$. Beim Absenken von S bzw. m im Bahnpunkt D wird die Energie $E_S = mgh \cos \varphi_1$ frei, so daß der Energiegewinn insgesamt $E_h - E_S$ beträgt. Die Gesamtenergie zu Beginn der zweiten Halbschwingung ist dann:

$$\begin{aligned} E_1 &= mg(1+h)(1 - \cos \varphi_1) = 2mg(1+h) \sin^2(\varphi_1/2) \\ &= 2mg(1+h)(1+h/l)^3 \sin^2(\varphi_0/2) = mgH_1(1+h/l)^3. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Anfangsenergie mgH_1 mit E_0 , so erhält man: $E_1 = E_0(1+h/l)^3$. Zu Beginn der $(n+1)$ -ten bzw. am Ende der n -ten Halbschwingung beträgt daher die enthaltene Gesamtenergie: $E_n = E_0(1+h/l)^{3n}$ und am Ende der n -ten Vollschwingung: $E_{2n} = E_0(1+h/l)^{6n}$. (2a)

Die Werte der E_n bilden also eine geometrische Folge. Ist $h/l \ll 1$ so gilt näherungsweise: $E_{2n} \approx E_0 \exp(6nh/l)$. Ist T die Zeit für eine Vollschwingung der Schaukel mit $T = (T_1 + T_2)/2$ und $T_1 = 2\pi \sqrt{(1+h)/g}$ bzw. $T_2 = 2\pi \sqrt{1/g}$, so kann E_{2n} als Funktion der Zeit $t = nT$ dargestellt werden [5]:

$$E(t) \approx E_0 \exp(6ht/(lT)) ; \quad (3)$$

d.h. die Gesamtenergie wächst für $h \ll 1$ exponentiell mit der Zeit. $E(t)$ ist ferner unabhängig von der Masse des Fahrgastes und wird nur durch die mittlere Schwin-

gungsdauer T und die relative Änderung $h/l = \Delta l/l$ der Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkt beeinflusst. Die Unabhängigkeit von der Masse ist wie beim gewöhnlichen Schwerependel eine Folge der Gleichheit von schwerer und träger Masse. Ursache für das exponentielle Wachstum der Gesamtenergie ist die direkte Proportionalität der Energiezunahme ΔE zur Gesamtenergie E , welche die Winkelamplitude im zugehörigen Umkehrpunkt festlegt. Bei Vergrößerung dieser Amplitude wächst die Geschwindigkeit v_B im tiefsten Bahnpunkt und damit auch die zu v_B^2 proportionale Zentrifugalkraft in B. Andererseits wird bei steigender Amplitude der durch das Niederhocken entstehende Energieverlust E_G immer kleiner.

Die beschriebene Verstärkung einer Schaukelbewegung kann gut an Hand eines einfachen Modellversuchs demonstriert werden. Man führt dazu das Ende der Schnur eines genügend langen Fadenpendels durch ein kleines Loch in einer Platte P. Dieses Loch stellt den Aufhängepunkt des Pendels dar. Ungefähr 2,5 cm unterhalb von P wird ein kleiner Pflock an der Pendelschnur zur Begrenzung der Änderung der Pendellänge befestigt. Das Pendel wird dann angestoßen und seine Länge jeweils beim Nulldurchgang bis zum Pflock verkürzt. Beim Erreichen des jeweiligen Höchstauschlags vergrößert man dann die Pendellänge wieder auf ihr ursprüngliches Maß. Visiert man von oben durch das Loch von P, so ist der Nulldurchgang genau feststellbar. Bereits nach wenigen Schwingungen ist dann eine deutlich erkennbare Amplitudenzunahme zu beobachten. Zur Umlenkung der Zugrichtung beim Verkürzen der Pendelschnur kann letztere über eine oberhalb von P angebrachte Rolle geführt werden [3].

Ein eindrucksvolles Demonstrationsobjekt für die Verstärkung einer Pendelschwingung durch Änderung des Parameters Pendellänge (parametrischer Verstärker) ist das Weihrauchfaß von Santiago de Compostela, das seit 700 Jahren bei feierlichen Gottesdiensten in der Kathedrale dieses Wallfahrtsortes geschwungen wird. Es hängt an einem dicken Seil, das über zwei in 20m Höhe befestigte Holzrollen läuft und bis zum Boden reicht, wo es von mehreren Männern bewegt werden kann. Schwingt das Faß (Masse ca. 60 kg) durch den tiefsten Bahnpunkt, so ziehen die Männer mit einem kräftigen Ruck an dem Seil und heben dabei das Faß um ca. 3m an. Hat dann das Faß einen seiner Umkehrpunkte erreicht, lassen die Männer das Seil nach, sodaß das Weihrauchfaß wieder seinen ursprünglichen Abstand vom Aufhängepunkt hat. Nach 17-maligem Ziehen und etwa 80s erreicht das Faß mit seinem Seil fast einen Winkel von 90° und schwingt bis ca. 1m an die Deckenwölbung heran. Auf seinem Weg zur Nullage gewinnt das Faß dann eine so große Geschwindigkeit, daß der Luftzug die in ihm enthaltenen glühenden Kohlen kräftig anfacht und der Weihrauch in dicken Wolken hervorquillt [9].

Gleichung (3) kann noch verallgemeinert werden: Mit den zu ihrer Herleitung ver-

wendeten Größen T_1 , T_2 und T ergibt sich:

$$(1+h)/l = 1+h/l = (T_1/T_2)^2 \text{ oder } T_2^2 h/l = T_1^2 - T_2^2 = (T_1 - T_2)(T_1 + T_2) \\ = 2(\Delta T) T.$$

Daraus folgt: $T_2^2 \cdot h/(lT) = 2\Delta T$: Benützt man noch $\Delta f = f_2 - f_1$ mit $f_2 = 1/T_2$ und $f_1 = 1/T_1$, so gilt: $\Delta f = \Delta T/(T_1 T_2)$ und $h/(lT) = 2\Delta f \cdot (f_2/f_1)$.

Damit kann der Exponent in Glg. (3) in einer etwas allgemeiner gehaltenen Form geschrieben werden. Man erhält dann für ihn den Term $12\Delta f t f_2/f_1$. Für $f_2 \approx f_1$, d.h. mit $h \ll l$ vereinfacht sich dieser zu $12\Delta f t$. Damit wird Glg. (3) zu:

$$E(t) \approx E_0 \exp(12\Delta f t), \quad (6)$$

wobei Δf die Differenz der beiden zu den Längen $l+h$ und l gehörenden Frequenzen f_1 und f_2 ist, die sich bei dem Verstärkungsvorgang mischen (ähnlich wie bei dem Entstehen von Schwebungen) [5].

Gleichung (6) legt nahe, daß auch auf anderen Gebieten der Physik für Schwingungsvorgänge, deren Frequenz durch periodische Änderungen eines frequenzbestimmenden Parameters - daher parametrische Verstärkung - rechteckförmig moduliert werden kann, ein Anwachsen der Amplituden möglich ist. So können z.B. die Spannungsamplituden einer in einem Schwingkreis ablaufenden elektrischen Schwingung durch periodische Änderung von Induktivität oder Kapazität dieses Kreises verstärkt werden.

3. Parametrische Verstärkung elektrischer Schwingungen

Verkleinert man z.B. die Kapazität C eines ungedämpften Schwingkreises immer dann, wenn die durch die elektrische Schwingung erzeugte Spannung U am Kondensator ihren positiven oder negativen Höchstwert erreicht hat, um einen bestimmten Betrag ΔC , so springt U um den Betrag ΔU . Da in einem solchem Kreis zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ besteht, ist der Strom zu Zeiten maximaler Spannung gleich Null und die Ladung am Kondensator daher konstant, sodaß mit $U_1 > U$ gilt:

$$C U = (C - \Delta C) U_1. \quad (7)$$

Wird dann zur Zeit des Nulldurchgangs von U die Kapazität C wieder auf ihren ursprünglichen Wert vergrößert (wie der Abstand l im Falle der Schaukel), so erhöht sich bei Wiederholung des Vorganges der Betrag der Spannungsamplitude weiter. Wie bei der Schaukel ist dabei die Frequenz, mit der sich der Parameter des Systems ändert, doppelt so groß wie die Frequenz der verstärkten Schwingung. Schreiben wir Glg. (7) in der Form:

$(C + \Delta C) U_0 = C U_1$, so gilt am Ende der ersten Vollschiwingung:

$U_2 = (1 + \Delta C/C)^2 U_0$, und am Ende der n -ten Vollschiwingung:

$U_{2n} = (1 + \Delta C/C)^{2n} U_0$. Der Gesamtenergieinhalt des Schwingkreises ist zu

diesem Zeitpunkt:

$$E_{2n} = 0,5(C + \Delta C/C) U_{2n}^2 \text{ oder: } E_{2n} = E_0(1 + \Delta C/C)^{4n} \text{ mit} \quad (8)$$

$E_0 = 0,5(C + \Delta C) U_0^2$ in Analogie zur Gleichung (2a). Unter Verwendung:
 $T_1 = 2\pi\sqrt{L(C + \Delta C)}$ und $T_2 = 2\pi\sqrt{LC}$ mit $L = \text{const.}$ ergibt sich daraus in gleicher Weise wie bei der Herleitung von Glg. (6) die Näherung:
 $E(t) \approx E_0 \exp(8 \Delta f t)$.

ΔC kann mechanisch durch Veränderung des Plattenabstandes eines Kondensators (Schwingkondensators) oder elektrisch durch Änderung der Kapazität eines gesperrten PN-Übergangs (Kapazitätsdiode) erzeugt werden. Im ersten Fall wird mechanische Energie, im zweiten Fall elektrische Energie zugeführt. Bei einer Kapazitätsdiode verbreitert man (ähnlich dem Auseinanderziehen von Kondensatorplatten) durch Erhöhung einer an einem großflächigen PN-Übergang anliegenden Sperrspannung U_{sp} die ladungsträgerarme Zone (Zonenbreite $d \approx \sqrt[3]{U_{sp}}$). Da die Kapazitätsdioden für sehr hohe Frequenzen zur Verfügung stehen, können parametrische Verstärker auch im Mikrowellenbereich eingesetzt werden. Ein Vorteil dieser Verstärker ist ihr geringes Eigenrauschen. Die Verstärkung wird nämlich in einem Blindwiderstand (Kondensator) vorgenommen, der frei von statistischen Vorgängen des Leitungsmechanismus ist, bei dem folglich keine thermisch bedingten Rauschspannungen auftreten, die eine Verstärkung kleiner Spannungen unmöglich machen. Ebenso entfällt das bei aktiven Bauelementen auftretende Schrot- und Stromverzweigungsrauschen. Das noch durch die Verlustwiderstände des Verstärkers verursachte Rauschen kann durch Abkühlen auf tiefe Temperaturen gering gehalten werden, wie dies in der Radioastronomie oder bei Satellitenfunkstationen der Fall ist.

4. Parametrische Verstärkung in der Optik

Tritt Laserlicht genügend großer Intensität (elektrische Feldstärke) mit einem geeigneten Medium in Wechselwirkung, so müssen zur Beschreibung der in dem Medium durch die Feldstärke E induzierten Polarisation P neben dem sonst üblichen linearen Term $\epsilon_0 \chi E$ mit $E = E_0 \sin \omega t$ noch höhere Terme berücksichtigt werden:

$$P = \epsilon_0 \chi_1 E_0 \sin \omega t + \epsilon_0 \chi_2 E_0^2 \sin^2 \omega t + \dots + \epsilon_0 \chi_n E_0^n \sin^n \omega t,$$

wobei χ_i den i -ten Term in der Entwicklung der elektrischen Suszeptibilität beschreibt.

Bestrahlt man ein Medium mit $\chi_n \approx 0$ für $n > 2$ mit zwei verschiedenen Lasersignalen $E_1 = E_{01} \sin \omega_1 t$ und $E_2 = E_{02} \sin \omega_2 t$, so gilt für die Polarisation:

$$P = \epsilon_0 \chi_1 (E_1 + E_2) + \epsilon_0 \chi_2 (E_1 + E_2)^2.$$

Setzt man für E_1 und E_2 die zugehörigen Funktionen ein, so ergibt sich nach einigen trigonometrischen Umformungen, daß in dem Medium neben den Erregerfrequenzen ω_1 und ω_2 noch vier neue Frequenzen $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_s = \omega_1 + \omega_2$ und $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$ auftreten. Insgesamt müßten also vier neue Lichtwellen entstehen. Tatsächlich kommen aber nicht alle zustande, da zwei Nebenbedingungen zu erfüllen sind, nämlich Transparenz des Mediums für die neuen Frequenzen und Anpassung der Brechzahlen zum Erzielen gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeiten

[10]. Als ein für diesen Zweck gut geeignetes Medium haben sich KDP-Kristalle (Kaliumhydrogensulfat) erwiesen.

Im folgenden soll nun der Fall betrachtet werden, daß allein die Welle mit der Frequenz $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$ zusätzlich entsteht. Formt man um, so ergibt sich $\omega_1 = \omega_d + \omega_2$. Eine Multiplikation mit \hbar liefert den Energiesatz: $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_d + \hbar\omega_2$. D.h. ein Photon der Frequenz ω_1 wird umgewandelt in je ein Photon mit der Frequenz ω_d bzw. ω_2 . Läßt man also in das Medium zwei Wellen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 einfallen, so gilt für zwei zugehörige Photonen $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ die Gleichung: $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_d + 2\hbar\omega_2$. D.h. aufgrund des nichtlinearen Verhaltens wird im Kristall die Intensität der Welle mit der Frequenz ω_2 auf Kosten der Intensität der zu der Frequenz ω_1 gehörigen Welle verstärkt. Zusätzlich entsteht im Kristall eine Welle der Frequenz ω_d . Neben dem Energiesatz muß natürlich auch der Impulssatz erfüllt sein. Daraus folgt, daß die entstehenden Wellen im Kristall gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben müssen. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird mit zunehmendem Laufweg im Kristall die Intensität der zu ω_1 gehörigen "Pumpwelle" schwächer, während die zu ω_2 und ω_d gehörigen Wellen an Intensität zunehmen.

Ein unmittelbarer Vergleich mit der mechanischen bzw. elektrischen parametrischen Verstärkung ergibt sich aus der Wirkungsweise eines optischen parametrischen Oszillators, der ohne eine zweite Erregerfrequenz ω_2 arbeitet. In diesem Oszillator wird der Kristall nur mit einer "Pumpwelle" der Frequenz ω_1 bestrahlt. Da sich in der Wärmestrahlung (Rauschen) des Systems immer Photonen mit geeigneter Frequenz ω_2 befinden, bilden diese das Signal, das im Zusammenwirken mit dem Pumpsignal und dem nichtlinearen Medium verstärkt wird. Zur Optimierung dieses Vorgangs wird das Medium in einen Perot-Fabry-Resonator gestellt und der Reflexionsfaktor der Spiegel für die Frequenz ω_2 möglichst hoch und für die Pumpfrequenz ω_1 möglichst niedrig gewählt. Das Licht der Frequenzen ω_2 und ω_d läuft dann zwischen den Spiegeln hin und her und wird bei jedem Durchgang etwas verstärkt. Falls die Verluste geringer sind als die Verstärkung, strahlt die Apparatur die beiden Frequenzen ω_2 und ω_d ab. Wählt man in Analogie zu unserem mechanischen und elektrischen Beispiel $\omega_1 = 2\omega_0$ und $\omega_2 = \omega_0$, so ist auch $\omega_d = \omega_0$ und man erhält nur Licht der subharmonischen Frequenz ω_0 . Wie im mechanischen und elektrischen Fall ist dann die Frequenz, mit welcher der zuständige Parameter des Systems geändert wird, doppelt so groß wie die Frequenz der verstärkten Schwingung.

Der Vorteil der optischen parametrischen Systeme liegt darin, daß die zu verstärkende Frequenz (Signalfrequenz) ω_2 nicht mehr durch diskrete atomare oder molekulare Zustände festgelegt wird. Sie muß nur entsprechend dem Impulssatz durch Anpassung der Brechzahlen die Bedingung gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit bezüglich der Pumpfrequenz erfüllen und ist sonst frei wählbar. Die Erfüllung dieser Bedingung kann in einem nichtlinearen Medium durch Änderung der Temperatur für kontinuierlich variable Frequenzen gewährleistet werden. Das parametrische System

ist damit kontinuierlich durchstimmbar. Hat z.B. das Pumplicht eine Frequenz von $5,67 \cdot 10^{14}$ Hz (Wellenlänge 529nm) und verwendet man als Medium einen direkt verspiegelten Lithium-Niobat-Kristall, so kann durch Veränderung der Temperatur von 49°C bis 62°C ein Wellenlängenbereich von 1160nm bis 960nm überstrichen werden. Die Verspiegelung des Kristalls ist dabei so gewählt, daß das grüne Pumplicht gut eintreten kann, für die neu erzeugten Frequenzen aber hohe Reflexion auftritt. Im parametrischen Oszillator wird also Licht nach einem ganz anderen Prinzip wie beim üblichen Laser erzeugt. Die neu entstandenen Photonen entstammen dem nichtlinearen Prozeß der Umwandlung eines Photons in zwei neue Photonen. Die neu auftretende Energie entspringt somit nicht aus angeregten atomaren oder molekularen Zuständen, sondern aus dem Lichtstrahl. Trotzdem hat die so erzeugte Strahlung die typischen Eigenschaften des Laserlichts: Bündelung, Kohärenz und Monochromasie.

5. Sinusförmige Parameteränderung beim Schaukeln

Im Gegensatz zu unserem jeweiligen mechanischen und elektrischen Beispiel geschieht die Änderung des frequenzbestimmenden Parameters im optischen Bereich kontinuierlich sinusförmig. Es soll nun untersucht werden, wie sich eine derartige Parameteränderung bei dem mechanischen Vorgang des Schaukelns auswirkt. Wir betrachten dazu wieder das System Fahrgast-Schaukel als einfaches mathematisches Pendel mit der Masse m , dessen Länge l sich sinus- oder cosinusförmig mit der Zeit ändert: $l = \bar{l}(1 + \varepsilon f(t))$, mit $f(t) = \cos(n\omega t)$ oder $f(t) = \sin(n\omega t)$: \bar{l} ist die mittlere Pendellänge, $\omega = \sqrt{g/\bar{l}}$. D.h. die Änderung des Parameters l soll mit einem Vielfachen der Frequenz des Pendels bei der Länge \bar{l} erfolgen. Ferner wird im folgenden $\varepsilon \ll 1$ vorausgesetzt.

Bei einem Winkelausschlag φ ist dann $mg \sin \varphi$ das Drehmoment der Schwerkraft mg um die Pendelaufhängung O und $m l^2 \dot{\varphi}$ der Drehimpuls der Pendelmasse m bezüglich O . Als Differentialgleichung der Pendelschwingung ergibt sich daraus:

$$-mg \sin \varphi = \frac{d}{dt}(m l^2 \dot{\varphi}) = m(2l \dot{l} \dot{\varphi} + l^2 \ddot{\varphi}) \text{ oder } l \ddot{\varphi} + 2 \dot{l} \dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Beschränkt man sich auf kleine Winkel φ , so gilt:

$$l \ddot{\varphi} + 2 \dot{l} \dot{\varphi} + g \varphi = 0. \quad (9)$$

Der Term mit \dot{l} kann durch die Substitution $x(t) = l(t) \cdot \varphi(t)$ beseitigt werden, da

$$\ddot{x} = \ddot{l} \varphi + 2 \dot{l} \dot{\varphi} + l \ddot{\varphi} \text{ ist. Glg. (9) erhält dann die Form:}$$

$$l \ddot{x} + (g - \ddot{l})x = 0 \text{ mit } \ddot{l} = \varepsilon \bar{l} \ddot{f}(t). \quad (10)$$

Die Substitution $\tau = \omega t$ führt zu $f(\tau) = \sin(n\tau)$ oder $f(\tau) = \cos(n\tau)$,

$x(t) = y(\tau) = l(\tau) \cdot \varphi(\tau)$ und $\ddot{x}(t) = \omega^2 y''(\tau)$, wenn $y''(\tau)$ die zweite Ableitung von $y(\tau)$ nach τ ist. Ebenso gilt $\ddot{f}(t) = \omega^2 f''(\tau)$. Damit wird unter Berücksichtigung von $l(\tau)$ die Gleichung (10) zu:

$y'' + (1 - \varepsilon f''(\tau)) \cdot y / (1 + \varepsilon f(\tau)) = 0$, und bei Erweiterung des Bruchterms mit $1 - \varepsilon f(\tau)$ und Vernachlässigung aller Terme mit ε^2 zu:

$$y'' + y \approx \varepsilon \cdot (f(\tau) + f''(\tau)) \cdot y. \quad (11)$$

Ist $y_0(\tau)$ für $\varepsilon=0$ eine Lösung von Glg. (11), so kann jede Lösung $y(\tau)$ von Glg. (11) in der Form $y(\tau) = y_0(\tau) + \Delta y(\tau)$ dargestellt und $y(\tau)$ auf der rechten Seite von Glg. (11) dementsprechend ersetzt werden. Damit entsteht auf dieser Seite der Faktor $\varepsilon y_0(\tau) + \varepsilon \Delta y(\tau)$ mit $\varepsilon \ll 1$, wobei $\Delta y(\tau)$ für kleines τ oder t in 1. Näherung zu τ bzw. t direkt proportional angenommen werden kann ($\Delta y(\tau) \propto t$). Beschränkt man sich auf Zeiten, für die $\varepsilon \Delta y(\tau)$ vernachlässigbar klein ist, z.B. auf Zeiten kleiner als die Ordnung von $1/\varepsilon$ (aus $\varepsilon \Delta y(\tau) < 1$ folgt nämlich $\Delta y(\tau) \propto t < 1/\varepsilon$), so läßt sich Glg. (11) weiter vereinfachen. Wählt man für die Funktion y_0 , die sozusagen das Ausgangselement für die modulierte Schwingung bildet, $y_0 = \alpha \cdot l(0) \cos \tau$ mit $\alpha = \varphi(0)$ so erhält man aus Glg. 11 für $f(\tau) = \cos(n\tau)$ oder $l(\tau) = \bar{l}(1 + \varepsilon \cos(n\tau))$ solange $\varepsilon \cdot (f+f'') \ll 1$ ist [3]:

$$y'' + y \approx \varepsilon \alpha l(0) (1 - n^2) \cos \tau \cdot \cos(n\tau) \\ \approx 0,5 \varepsilon \alpha l(0) (1 - n^2) (\cos(n+1)\tau + \cos(n-1)\tau) \text{ mit } l(0) = \bar{l}(1 + \varepsilon). \quad (12)$$

Glg. (12) ähnelt damit der Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung mit kleinem zwingenden Term. Die allgemeine Lösung für $n \neq 2$ ist dann [3]:

$$\varphi(\tau) = \frac{y(\tau)}{l(\tau)} = \alpha \frac{l(0)}{l(\tau)} \left\{ \left(1 - \varepsilon \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4}\right) \cos \tau + \varepsilon \frac{n^2 - 1}{2n} \left(\frac{\cos(n+1)\tau}{n+2} + \frac{\cos(n-1)\tau}{n-2} \right) \right\} \quad (13)$$

Bildet man $\varphi'(\tau)$ nach der Quotientenregel, so ergibt sich aus $\varphi'(\tau) = 0$ die Zeit bis zum Erreichen des ersten Spitzenwertes des Winkels φ . $\varphi'(\tau) = 0$ für $\tau = \pi$ oder $t = \pi \sqrt{1/g}$. Es ist dann $l(\pi) = \bar{l}(1 \pm \varepsilon)$ und gemäß Glg. (13) gilt:

$$\varphi(\pi) = \frac{y(\pi)}{l(\pi)} = \alpha \frac{1 + \varepsilon}{1 \pm \varepsilon} \left\{ -1 + \varepsilon \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \mp \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \right) \right\},$$

wobei das obere Vorzeichen für gerade n und das untere Vorzeichen für ungerade n gilt. Als Amplitudenzunahme erhält man dann: $\Delta\varphi(\pi) = |\varphi(\pi)| - \alpha = 0$ für gerade n mit $n \neq 2$ und $\Delta\varphi(\pi) \approx -6\varepsilon\alpha/(n^2 - 4)$ für ungerade n . In beiden Fällen ist $\varphi(2\pi) = \alpha$ und der Fahrgast kehrt daher immer wieder zum Ausgangspunkt zurück, wenn er beim Zurückschwingen den Schwerpunktsabstand l nach derselben Funktionsvorschrift ändert.

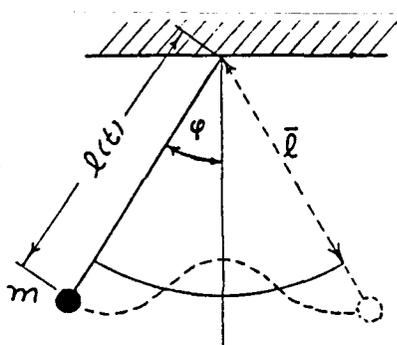


Abb. 3 (nach [3])

Diese Erfolglosigkeit erklärt sich physikalisch dadurch, daß für gerade n und $\varepsilon > 0$ sich die hineingesteckte bzw. herausgeholtte Energie aus Symmetriegründen innerhalb einer Halbschwingung ausgleichen (s. Abb. 3). Für ungerade n und $\varepsilon > 0$ gilt dasselbe innerhalb einer Vollschiwingung.

Ein Aufschaukeln ist für $\varepsilon > 0$ und ungerades n nur für $n=1$ möglich, wenn der Insasse am Rückweg den Schwerpunktsabstand $l(\pi)$ bis zum Erreichen von $\varphi(2\pi)$ beibehält und erst dann wieder zu $l(0)$ zurückkehrt und von da ab seine Bewegung wiederholt.

Für ungerade n ist noch für $\varepsilon < 0$ eine Amplitudenzunahme nach der ersten Halbschwingung festzustellen, da hier wie für $n=1$ und $\varepsilon > 0$ jeweils in der näheren Umge-

bung des tiefsten Bahnpunktes Hubarbeit gegen größere Werte der Summe aus Zentrifugalkraft und Schwerkraftkomponente verrichtet werden muß. Die für $\varepsilon < 0$ und ungerade n mit $n \neq 1$ auftretenden $\Delta\varphi(\pi)$ sind kleiner als die entsprechende Zunahme $2\varepsilon\alpha$ für $n=1$, da verrichtete und gewonnene Arbeiten sich teilweise kompensieren. Bei $n=2$ heben sich hineingesteckte und gewonnene Arbeit innerhalb einer Halbschwingung vollständig auf (s. Abb.3), sodaß keine gesonderte Diskussion der zugehörigen Lösung der Differentialgleichung (12) notwendig ist.

Für $f(\tau) = \sin(n\tau)$ oder $l(\tau) = \bar{l}(1 + \varepsilon \sin(n\tau))$ erhält man statt Glg. (12) eine Differentialgleichung, in der $\cos(n+1)\tau$, $\cos(n\tau)$ und $\cos(n-1)\tau$ durch entsprechende Sinusfunktionen ersetzt sind. Als allgemeine Lösung dieser neuen Differentialgleichung ergibt sich für $n \neq 2$:

$$\varphi(\tau) = \alpha \frac{\bar{l}}{l(\tau)} \left\{ \cos\tau + A\varepsilon \sin\tau + \varepsilon \frac{n^2 - 1}{2n} \left(\frac{\sin(n+1)\tau}{n+2} + \frac{\sin(n-1)\tau}{n-2} \right) \right\} \quad (14)$$

wobei A durch die Anfangsbedingung für $\varphi'(\tau)$ festgelegt ist. Aus Glg. (14) und $l(\pi) = \bar{l}$ folgt $\varphi(\pi) = -\alpha$, $\varphi(2\pi) = \alpha$; d.h. es erfolgt keine Amplitudenzunahme für $n \neq 2$. Für $n=2$ erhält man als Näherungslösung der neuen Differentialgleichung für $\varphi'(0)=0$:

$$\varphi(\tau) = \alpha \bar{l}/l(\tau) \cdot \left(\cos\tau + 0,75 \varepsilon (\sin\tau + \tau \cos\tau) + 1/6 \cdot \varepsilon \sin 3\tau \right); \quad (15)$$

Hier ist $|\varphi(\pi)| = \alpha(1 + 0,75\pi\varepsilon)$, also $\Delta\varphi(\pi) = |\varphi(\pi)| - \alpha = 0,75\pi\varepsilon\alpha$ [3]. Dasselbe ergibt sich für $\varphi(2\pi) - |\varphi(\pi)|$. $n=2$ (s. Abb. 4) liefert damit die einzige sinusförmige Änderung von \bar{l} , die sowohl beim Vorwärts- als auch beim Zurückschwingen eine Vergrößerung der jeweiligen Amplitude erzeugt. Man vermutet hier zu Recht eine Art Resonanzeffekt. Projiziert man nämlich die Schwingung eines mathematischen Pendels der Länge \bar{l} und der Frequenz ω in Richtung der Schwingungsebene auf eine dazu senkrechte Vertikalebene, so entsteht eine periodische Bewegung in vertikaler Richtung, die mit der doppelten Frequenz 2ω abläuft. 2ω ist aber auch die

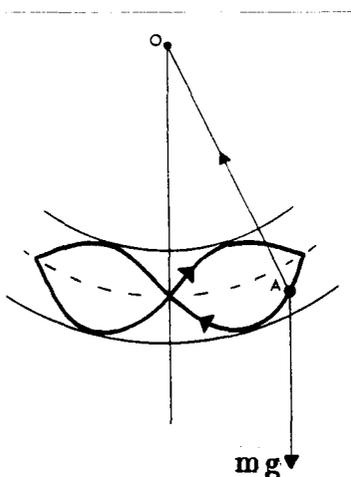


Abb. 4:

Frequenz der Parameteränderung. Ferner besteht eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ zwischen der durch Projektion erzeugten Vertikalbewegung und der sinusförmigen Parametervariation. Frequenzgleichheit und $\pi/2$ -Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator sind aber Merkmale eines Resonanzfalles. Allerdings hat der in der Projektion erscheinende Vertikalanteil z der Pendelschwingung nicht den Verlauf einer einfachen Sinusfunktion der Zeit. Für z gilt nämlich: $z = \bar{l}(1 - \cos\varphi)$ mit $\varphi = \varphi_0 \cos\omega t$ für kleine Winkel φ . Lediglich eine 1. Näherung von z kann durch alleinige Verwendung von $\cos 2\omega t$ gebildet werden.

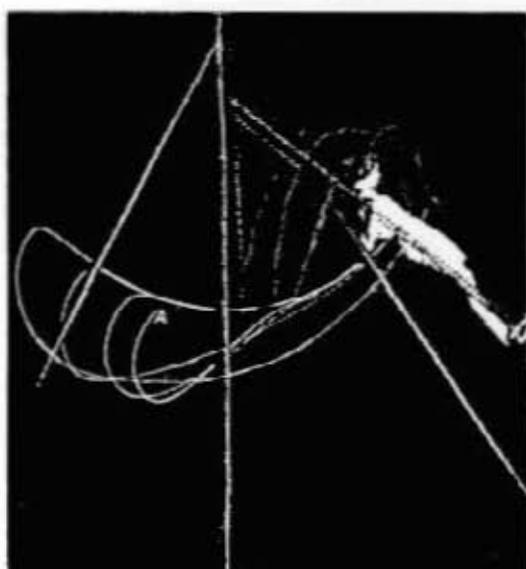


Abb. 5 (nach [2])

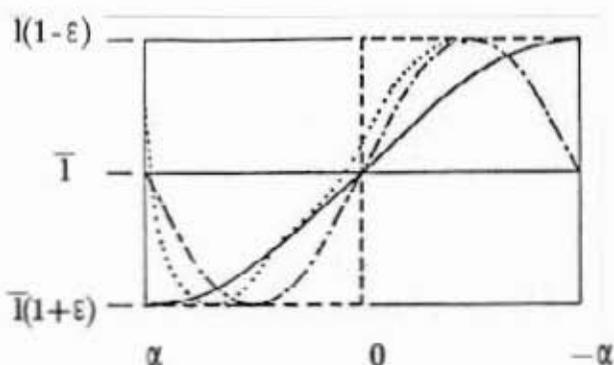


Abb. 6: (n. [3])

.....: $l_w(\tau)$; —: $\cos \tau$; - - - -: $\sin 2\tau$

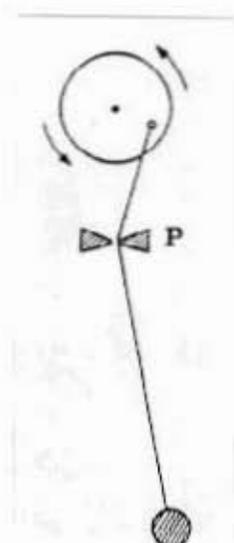


Abb. 7: (nach [7])

Die Amplitudenzunahme $\Delta\phi$ ist auch bei sinusförmiger Parameteränderung direkt proportional zum Ausgangswinkel. Die Schaukelbewegung läßt sich daher auch in diesem Fall nur schlecht aus kleinen Winkeln heraus verstärken. In Abb. 5 [2] ist in einer Zeitaufnahme die Spur einer kleinen Blitzlampe aufgezeichnet, die am Gürtel eines schaukelnden Kindes befestigt war. Die Spur beginnt im Punkt A (Abb. 5) und umfaßt dreieinhalb Vollschrwingungen. Der für die Verstärkung der Schaukelbewegung notwendige "Pumpvorgang" wurde von dem Kind nur während der Vorwärtshalbschwingung ausgeführt und die Lampe erst nach Vollendung von zweieinhalb Vollschrwingungen gezündet.

Die Lampenspur zeigt natürlich nur ein recht grobes Bild der wahren Bahnkurve des Schwerpunktes des Kindes im Verlauf der komplexen "Pumpbewegung". In groben Zügen bestätigt diese Spur die Proportionalität der Amplitudenzunahme zum jeweiligen Ausgangswinkel.

Aus Abb. 5 kann ferner der ungefähre Graph der Funktion $l_w(\tau)$ entnommen werden, nach der sich bei einer wirklichen Schaukelbewegung die Pendellänge ändert. $l_w(\tau)$ ist in Abb. 6 [3] mit den beiden Funktionen $\cos \tau$ und $\sin 2\tau$ verglichen, die nach unseren Berechnungen bei sinus- oder cosinusförmiger Änderung der Pendellänge l den wirksamsten Amplitudenzuwachs liefern. Man erkennt, daß $l_w(\tau)$ diesen beiden Funktionen recht nahekommt und daß in allen Fällen $l(\tau)$ beim Abwärtsschwingen größer als beim Aufwärtsschwingen ist und daher in der näheren Umgebung des tief-

sten Bahnpunktes Hubarbeit gegen Zentrifugalkraft und Schwerkraftkomponente verrichtet wird.

Als Demonstrationsversuch zur parametrischen Verstärkung bei sinusförmiger Änderung der Pendellänge kann das bereits früher beschriebene Experiment dienen, wenn das Ende der Pendelschnur am Rand einer gleichmäßig rotierenden, motorbetriebenen Scheibe befestigt ist. (Vgl. Abb. 7; P: Platte mit Loch).

6. Verstärkung von Schaukelschwingungen durch Drehbewegungen

Wie bereits erwähnt, kann eine in Ruhe befindliche Schaukel nicht durch bloßes Anheben und Senken des Schwerpunktes des Insassen in Bewegung gesetzt werden. Beobachtet man ein Kind, das auf einem an Seilen oder Ketten befestigten, ruhenden Schaukelbrett sitzt oder steht, so sieht man, daß das Kind durch Zurück- oder Vorlehnen, also durch Drehungen die Schaukelbewegung einleiten und verstärken kann.

Erfolgt das Vorwärtsschwingen z. B. von links nach rechts und das Zurückschwingen von rechts nach links, so muß sich für ein Ingangsetzen und Verstärken der Schaukelbewegung ein sitzendes Kind kurz vor Beendigung des Vorwärtsschwingens nach vorn lehnen und damit eine Drehung im Uhrzeigersinn ausführen und kurz vor dem Ende des Zurückschwingens zurücklehnen, also sich entgegengesetzt zur Uhrzeigerbewegung drehen. Bei diesen Bewegungen werden durch Ziehen oder Drücken die Befestigungsseile oder Ketten so gespannt, daß die Summe der dadurch auftretenden Kräfte (ähnlich wie in Abb. 8) die rüctreibende Wirkung der Schwerkraft unterstützt. Die bei diesen Verformungen verrichtete Arbeit führt der Schaukelbewegung Energie zu. Es ist aber nicht das Verformen der Seile oder Ketten allein, das die Verstärkung der Schaukelbewegung verursacht. (Dies ergibt sich schon daraus, daß auch eine Schaukel mit starren Befestigungsstreben durch Vor- und Zurücklehnen des Benützers in zunehmende Schwingungen versetzt werden kann.) Vielmehr trägt dazu auch das Starten und Stoppen der Drehbewegungen bei, die zum Spannen der Seile oder Ketten führen und die der Benutzer B im Sitzen im wesentlichen um seinen Schwerpunkt ausführt, und für die er die notwendigen Drehmomente aufbringen muß. Ist beim Ablauf dieser Drehbewegungen das System Benutzer-Schaukel abgeschlossen, so muß der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten bleiben und die Schaukel reagiert ähnlich einem Drehschemel auf die Drehimpulsänderungen von B. Befindet sich z. B. die Schaukel in der Phase des Zurückschwingens, d. h. bewegt sie sich im Uhrzeigersinn um ihren Aufhängepunkt O, so wartet der Benutzer B im allgemeinen, bis dieser Vorgang nahezu beendet ist und beschleunigt dann diese Schwingungsbewegung weiter, indem er unter Erzeugung eines gegen den Uhrzeigerumlauf gerichteten Drehmomentes (Zurücklehnen) eine Drehung um seinen Schwerpunkt S mit dementsprechender Drehrichtung einleitet.

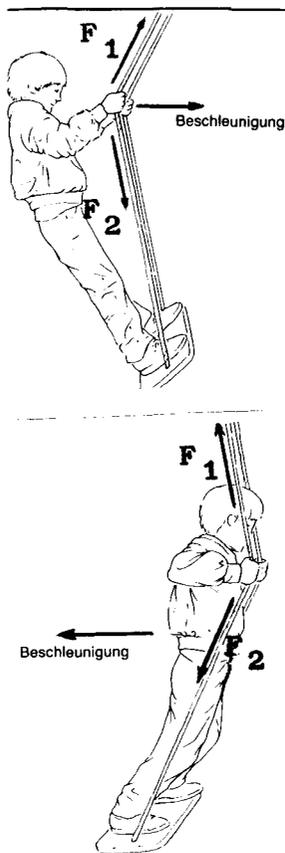


Abb. 8: (nach [7])
 F_1 , F_2 : Kräfte auf die
 Hände

Hat die Schwerkraft die Bewegungsrichtung der Schaukel umgekehrt (Beginn der gegen den Uhrzeigerumlauf erfolgenden Vorwärtsschwingung), stoppt B die Gegenuhrzeigerrotation um S und erteilt damit sich und der Schaukel einen zusätzlichen Schwung um O in Richtung des gegen die Uhrzeigerdrehung erfolgenden Vorwärtsschwingens. Entsprechend initiiert B am Ende des Vorwärtsschwingens durch Vorlehnen eine Drehung im Uhrzeigersinn und verstärkt so die Gegenuhrzeigerrotation der Schaukel um O. Bei Beginn des Zurückschwingens stoppt B seine Rotation um S und erteilt damit sich und der Schaukel eine zusätzliche Drehbewegung um O im Uhrzeigersinn, also in Richtung des Zurückschwingens [8].

Steht B auf der Schaukel, so kann er in derselben Weise wie im Sitzen durch Vor- und Zurücklehnen Kräfte in den Seilen oder Ketten (vgl. Abb. 8) und Drehmomente in der Nähe der Umkehrpunkte erzeugen. Dabei richtet sich B im allgemeinen von einer Schräglage während des Vorwärtsschwingens zu einer mehr aufrechten Stellung während des Zurückschwingens auf.

Die Vergrößerung der Schwingungsamplituden einer Schaukel durch Drehbewegungen erfolgt somit nach ganz anderen und komplizierteren physikalischen Gesetzen wie das Anwachsen der Amplituden bei parametrischer Verstärkung. Die periodisch erzeugten Drehmomente und ihre Wirkung auf die Schaukelbewegung sind unabhängig von der Größe der Schwingsamplitude bzw. von der gespeicherten Energie. Die mittlere Energiezufuhr ist daher annähernd konstant und die enthaltene Gesamtenergie wächst linear statt exponentiell.

Dieses Resultat bestätigt die bekannte, experimentell bestätigte Tatsache, daß die parametrische Verstärkung von einem bestimmten Winkel ab wesentlich wirkungsvoller wie die Methode der Drehungen ist. Das optimale Vorgehen für ein möglichst rasches Anwachsen der Schaukelamplituden besteht daher darin, daß man zunächst die ruhende Schaukel durch Drehbewegungen zu immer größeren Amplituden anregt und dann ab einem gewissen Winkel die Schaukelbewegung parametrisch verstärkt. Häufig werden auch beide Anregungsmechanismen verknüpft. Ein auf einem Schaukelbrett zwischen den Befestigungsseilen stehendes Kind geht nämlich nur selten in den Umkehrpunkten einfach in die Kniebeuge. Normalerweise läßt es sich z. B. am Ende des Zurückschwingens gleichzeitig durch Ausstrecken der Arme zurückfallen, bis es bei Beginn seiner Vorwärtsbewegung durch seine Armmuskeln gestoppt wird

und sein gegen den Uhrzeigerumlauf gerichteter Drehimpuls sich in eine ebenso gerichtete Drehbewegung von Kind und Schaukel um O umwandelt. Die beim Zurückfallen im Gravitationsfeld aufgenommene Energie verwandelt sich dabei in kinetische Energie der Drehbewegung um O. Daß sich eine ruhende Schaukel während des Zurückfallens des Kindes nicht im Uhrzeigersinn dreht, erklärt sich dadurch, daß in diesem Fall ein abgeschlossenes System erst nach Einbeziehen der Erde vorliegt und eine Bewegung des Teilsystems Erde-Schaukel als Reaktion auf die Bewegung des Kindes nicht beobachtbar ist.

7. Literaturverzeichnis

- [1] K. Magnus, "Schwingungen", Teubner Verlag, Stuttgart 1986
- [2] Peter L. Tea Jr., Harold Falk, Am. J. Phys. 36 (1968), 1165
- [3] Joseph A. Burns, Am. J. Phys. 38(1970). 920
- [4] Slobodezki/Aslamasow, "Nachgedacht und mitgemacht",
Teubner Verlag Leipzig 1984
- [5] Stephen M. Curry, Am. J. Phys. 44 (1976), 924
- [6] J. Becker, "Die Schiffschaukel", Erlangen 1990 (priv. Mitteilung)
- [7] A. E. Siegman, Am. J. Phys. 37 (1969), 843
- [8] B. F. Gore, Am. J. Phys. 38 (1970), 378
- [9] J. Walker, Spektrum der Wissenschaft, 6 (1989), 134
- [10] F. Westermann, "Laser", Teubner Verlag, Stuttgart 1976

Anmerkung zu Gleichung (2)

Für kleine Winkel φ und $h/l \ll 1$ folgt aus Glg. (2): $\varphi_1 \approx \varphi_0(1+1,5 h/l)$ und damit $\Delta\varphi \approx 1,5 h \varphi_0/l$. Zum Vergleich der Amplitudenzunahme in Zusammenhang mit Glg. (15) oder (13) muß man beachten, daß $l+h = \bar{l}(1+\varepsilon)$, $l = \bar{l}(1-\varepsilon)$ und h daher $2\bar{l}\varepsilon$ entspricht. Daraus ergibt sich $h/l = 2\varepsilon/(1-\varepsilon) \approx 2\varepsilon$ und damit $\Delta\varphi \approx 3\varepsilon\alpha$ wegen $\alpha = \varphi_0$. Dieses $\Delta\varphi$ ist also größer als die aus Glg. (15) oder (13) folgenden Amplitudenzunahmen $0,75\pi\varepsilon\alpha$ bzw. $2\varepsilon\alpha$ in Übereinstimmung mit der sich rein anschaulich ergebenden, jeweiligen Energiezufuhr.